Elementos de sistemas dinámicos y embaldosados

Clase 6: Sistemas de embaldosados de sustitución II

María Isabel Cortez

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile.

Salta, 10 de marzo 2011

Sea $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ una sustitución.

Sea $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ una sustitución.

Para estudiar las componentes minimales de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$ necesitamos el siguiente lema:

Sea $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ una sustitución.

Para estudiar las componentes minimales de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$ necesitamos el siguiente lema:

Lema

La función $\omega : X_{\mathcal{A},\omega} \to X_{\mathcal{A},\omega}$ está bien definida y es sobreyectiva.

Sea $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ una sustitución.

Para estudiar las componentes minimales de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$ necesitamos el siguiente lema:

Lema

La función $\omega : X_{\mathcal{A},\omega} \to X_{\mathcal{A},\omega}$ está bien definida y es sobreyectiva.

Demostración: pizarra.

Relación de equivalencia sobre $\mathcal{A}$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

Relación de equivalencia sobre $\mathcal{A}$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$A \sim B$ (A está relacionado con B) si y sólo si

$A = B$ o $\exists n, m > 0$ tal que $\omega^n(B)$ tiene una baldosa equivalente a A and $\omega^m(A)$ tiene una baldosa equivalente a B.

Relación de equivalencia sobre $\mathcal{A}$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$A \sim B$ (A está relacionado con B) si y sólo si

$$A = B \text{ o } \exists n, m > 0 \text{ tal que } \omega^n(B) \text{ tiene una baldosa equivalente a } A \text{ and } \omega^m(A) \text{ tiene una baldosa equivalente a } B.$$

Sean $A_1, \cdots, \mathcal{A}_l$ las clases de equivalencia de $\sim$

Relación de equivalencia sobre $\mathcal{A}$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$A \sim B$ (A está relacionado con B) si y sólo si

$$A = B \text{ o } \exists n, m > 0 \text{ tal que } \omega^n(B) \text{ tiene una baldosa equivalente a } A \text{ and } \omega^m(A) \text{ tiene una baldosa equivalente a } B.$$

Sean $A_1, \cdots, \mathcal{A}_l$ las clases de equivalencia de $\sim$

<u>Obs:</u> si ω es primitiva entonces $l = 1$ y $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

Relación de equivalencia sobre $\mathcal{A}$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$A \sim B$ (A está relacionado con B) si y sólo si

$$A = B \text{ o } \exists n, m > 0 \text{ tal que } \omega^n(B) \text{ tiene una baldosa equivalente a } A \text{ and } \omega^m(A) \text{ tiene una baldosa equivalente a } B.$$

Sean $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_l$ las clases de equivalencia de $\sim$

Obs: si ω es primitiva entonces $l = 1$ y $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

Ejemplo: Sea $\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\}$ y ω la sustitución de Cantor. Entonces $l = 2$ con $\mathcal{A}_1 = \{\square\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\blacksquare\}$.

Accesibilidad

Decimos que la clase $\mathcal{A}_i$ es **accesible** a partir de la clase $\mathcal{A}_j$, si existen $A \in \mathcal{A}_i$ y $B \in \mathcal{A}_j$ tales que $\omega^k(A)$ contiene una baldosa equivalente a B.

Accesibilidad

Decimos que la clase $\mathcal{A}_i$ es **accesible** a partir de la clase $\mathcal{A}_j$, si existen $A \in \mathcal{A}_i$ y $B \in \mathcal{A}_j$ tales que $\omega^k(A)$ contiene una baldosa equivalente a B.

Observar que existe al menos una clase $\mathcal{A}_i$ que es accesible sólo por ella misma (Por qué?).

Accesibilidad

Decimos que la clase $\mathcal{A}_i$ es **accesible** a partir de la clase $\mathcal{A}_j$, si existen $A \in \mathcal{A}_i$ y $B \in \mathcal{A}_j$ tales que $\omega^k(A)$ contiene una baldosa equivalente a B.

Observar que existe al menos una clase $\mathcal{A}_i$ que es accesible sólo por ella misma (Por qué?).

Es posible ordenar las clases como $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_m, \mathcal{A}_{m+1}, \cdots, \mathcal{A}_l$, de manera que $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_m$ son las clases accesibles sólo por ellas mismas, y tal que si $\mathcal{A}_j$ es accesible desde $\mathcal{A}_i$, entonces $i \leq j$ (Por qué?).

Nueva disposición de la matriz M_ω.

Después de re ordenar los elementos de $\mathcal{A}$ según las clases de equivalencia, la matriz M_ω luce así:

Nueva disposición de la matriz M_ω.

Después de re ordenar los elementos de $\mathcal{A}$ según las clases de equivalencia, la matriz M_ω luce así:

$$M_\omega = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 & X & X & X \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & X & X & X \\ & \ddots & \ddots & 0 & X & X & X \\ \vdots & & \ddots & M_m & X & X & X \\ \vdots & & & \ddots & M_{m+1} & X & X \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & M_l \end{pmatrix}$$

Nueva disposición de la matriz M_ω.

Después de re ordenar los elementos de $\mathcal{A}$ según las clases de equivalencia, la matriz M_ω luce así:

$$M_\omega = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 & X & X & X \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & X & X & X \\ & \ddots & \ddots & 0 & X & X & X \\ \vdots & & \ddots & M_m & X & X & X \\ \vdots & & & \ddots & M_{m+1} & X & X \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & M_l \end{pmatrix}$$

Tomando potencias de ω se puede asegurar que $M_1, \cdots, M_l$ son matrices primitivas o iguales a [0]. (Ver *Introduction to symbolic dynamics and coding.* Lind and Marcus, 95)

Comentarios.

Para todo $1 \leq i \leq l$, decimos que M_i es la restricción de M_ω a la clase $\mathcal{A}_i$.

Comentarios.

Para todo $1 \leq i \leq l$, decimos que M_i es la restricción de M_ω a la clase $\mathcal{A}_i$.

- Observar que $\omega : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i^*$ está bien definida, para todo $1 \leq i \leq m$.

Comentarios.

Para todo $1 \leq i \leq l$, decimos que M_i es la restricción de M_ω a la clase $\mathcal{A}_i$.

- Observar que $\omega : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i^*$ está bien definida, para todo $1 \leq i \leq m$.
- La matriz asociada a $\omega|_{\mathcal{A}_i}$ es M_i.

Comentarios.

Para todo $1 \leq i \leq l$, decimos que M_i es la restricción de M_ω a la clase $\mathcal{A}_i$.

- Observar que $\omega : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i^*$ está bien definida, para todo $1 \leq i \leq m$.
- La matriz asociada a $\omega|_{\mathcal{A}_i}$ es M_i.
- Para $1 \leq i \leq m$, cada M_i es primitiva (de lo contrario, $M_i = [0]$ lo que implica que $\mathcal{A}_i = \{A\}$ y $\omega(A) = \emptyset$).

Comentarios.

Para todo $1 \leq i \leq l$, decimos que M_i es la restricción de M_ω a la clase $\mathcal{A}_i$.

- Observar que $\omega : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i^*$ está bien definida, para todo $1 \leq i \leq m$.
- La matriz asociada a $\omega|_{\mathcal{A}_i}$ es M_i.
- Para $1 \leq i \leq m$, cada M_i es primitiva (de lo contrario, $M_i = [0]$ lo que implica que $\mathcal{A}_i = \{A\}$ y $\omega(A) = \emptyset$).
- Luego, $X_i = X_{\mathcal{A}_i,\omega}$ es una componente minimal de $X_{\mathcal{A},\omega}$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Proposición

Las componentes minimales de $X_{\mathcal{A},\omega}$ son exactamente $X_1, \cdots, X_m$.

Proposición

Las componentes minimales de $X_{\mathcal{A},\omega}$ son exactamente $X_1, \cdots, X_m$.

Demostración: pizarra.

Proposición

Las componentes minimales de $X_{\mathcal{A},\omega}$ son exactamente $X_1, \cdots, X_m$.

Demostración: pizarra.

Corolario

$(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$ tiene a lo más $|\mathcal{A}|$ componentes minimales.

Ejemplos

Sea $\mathcal{A} = \{\triangle, \triangledown, \blacktriangle\}$. considere la siguiente sustitución:

Ejemplos

Sea $\mathcal{A} = \{\triangle, \triangledown, \blacktriangle\}$. considere la siguiente sustitución:

$\blacktriangle \longrightarrow$  , $\triangle \longrightarrow$  , $\triangledown \longrightarrow$ 

Ejemplos

Sea $\mathcal{A} = \{\triangle, \triangledown, \blacktriangle\}$. considere la siguiente sustitución:

$\blacktriangle \longrightarrow$  , $\triangle \longrightarrow$  , $\triangledown \longrightarrow$ 

La matriz asociada a ω es $M_\omega = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejemplos

Sea $\mathcal{A} = \{\triangle, \triangledown, \blacktriangle\}$. considere la siguiente sustitución:

$\blacktriangle \rightarrow$  , $\triangle \rightarrow$  , $\triangledown \rightarrow$ 

La matriz asociada a ω es $M_\omega = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

El sistema $X_{\mathcal{A},\omega}$ tiene una única componente minimal X_1, que corresponde al espacio de la sustitución que se obtiene al restringir M_ω a $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Medidas de probabilidad invariantes.

Teorema

Sean $X_1, \cdots, X_m$ las componentes minimales de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$. Entonces

Medidas de probabilidad invariantes.

Teorema

Sean $X_1, \cdots, X_m$ las componentes minimales de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$. Entonces

- *Para cada $1 \leq i \leq m$, existe una medida de probabilidad invariante μ_i de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$ soportada sobre X_i.*

Medidas de probabilidad invariantes.

Teorema

Sean $X_1, \cdots, X_m$ las componentes minimales de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$. Entonces

- *Para cada $1 \leq i \leq m$, existe una medida de probabilidad invariante μ_i de $(X_{\mathcal{A},\omega}, T)$ soportada sobre X_i.*
- *$\mu_1, \cdots, \mu_m$ son las únicas medidas de probabilidad* **ergódicas** *del sistema.*