

Sistemas simbólicos minimales: subshifts de sustitución y otros.

María Isabel Cortez
maria.cortez@usach.cl

Índice

1. Introducción.	1
1.1. Conceptos básicos.	2
1.2. Espacios simbólicos.	2
1.3. Subshifts.	4
2. Subshifts de sustitución.	5
2.1. Puntos periódicos de la sustitución.	7
2.2. Minimalidad.	7
2.3. Frecuencias.	10
3. Subshifts Sturmianos.	13
4. Subshifts de Toeplitz.	14
4.1. Sucesiones de Toeplitz.	14
4.2. Subshifts de Toeplitz.	16
4.3. Odometros.	17
5. Subshifts de tipo finito.	18

1. Introducción.

La rama de los sistemas dinámicos tiene su origen en el estudio de fenómenos físicos como el movimiento de planetas o el movimiento de partículas de un gas. Estos fenómenos tienen en común el evolucionar a través del tiempo, lo que en matemática se puede representar por medio de un espacio X , el conjunto de todos los estados que el sistema puede alcanzar, y de una función $T : X \rightarrow X$, la regla que sigue el sistema para pasar de un estado a otro. Por ejemplo, si quisieramos modelar el movimiento de la Tierra en torno al sol, X sería el conjunto de todas las posiciones admisibles de la Tierra, y $T : X \rightarrow X$ sería la función definida de manera que $T(x)$ indique la posición de la Tierra en el tiempo $t = 1$ si en el tiempo $t = 0$ la Tierra estaba en la posición x . Este es un modelo simplificado de la realidad, pues entre otras cosas, hemos discretizado el tiempo. Podemos simplificarlo aun más discretizando el espacio X mediante una partición finita $\{X_0, \dots, X_{N-1}\}$. Entonces, en lugar de guardar la posición exacta de la Tierra en el tiempo $t = n$, guardamos el símbolo $i \in \{0, \dots, N - 1\}$ que indica que en el tiempo $t = n$ la posición de la Tierra estaba en el conjunto X_i . De esta forma, a cada punto $x \in X$ le asignamos una sucesión $\varphi(x) = (x_n)_{n \geq 0}$ de símbolos en $\{0, \dots, N - 1\}$, que hemos definido de manera que

$$x_n = i \quad \text{si y sólo si} \quad T^n(x) \in X_i.$$

La sucesión $\varphi(T(x))$ resulta ser igual a la sucesión $\varphi(x)$ desplazada un lugar hacia la izquierda. Esto lo podemos escribir como $\varphi(T(x)) = \sigma(\varphi(x))$, donde σ es la función que a la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le asigna la sucesión $(x_{n+1})_{n \geq 0}$. El espacio $\varphi(X) \subseteq \{0, \dots, N - 1\}^{\mathbb{N}}$ equipado con la función $\sigma : \varphi(X) \rightarrow \varphi(X)$ es una versión simplificada del sistema dado por X y la función T . Es muy probable que este sistema contenga menos información que el original, pero tal vez esta sea suficiente para lo que deseamos estudiar. Esta idea fue aplicada en 1898 por Jaques Hadamard [4] al estudio de flujos geodésicos sobre superficies de curvatura negativa, y fue lo que dió inicio a la dinámica simbólica.

1.1. Conceptos básicos.

Nos referiremos como *sistema dinámico* a un par (X, T) , donde X es un conjunto que llamaremos *espacio de fase* y $T : X \rightarrow X$ es una función. Para

estudiar el sistema dinámico (X, T) es útil dotar a X y a T de cierta estructura. En este curso supondremos que X es un espacio métrico compacto y que T es una función continua. Un sistema dinámico con estas características se conoce como *sistema dinámico topológico*.

Los sistemas dinámicos que estudiaremos en este curso son minimales (excepto los del último capítulo). Un sistema dinámico topológico (X, T) es *minimal* si el único subconjunto de X que es cerrado, T -invariante y no vacío es X . Esta propiedad es equivalente a que para todo $x \in X$ su *órbita* $o_T(x) = \{T^n(x) : n \geq 0\}$ es densa en X .

Una *medida de probabilidad invariante* de (X, T) es una medida μ definida sobre la sigma-álgebra de Borel de X que verifica $\mu(X) = 1$ y $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ para todo $A \subseteq X$ en la sigma-álgebra de Borel de X . Todo sistema dinámico topológico (X, T) posee al menos una medida de probabilidad invariante, lo que permite estudiar estos sistemas no sólo desde el punto de vista topológico sino que también en medida.

En este curso estudiaremos algunos aspectos de ciertos sistemas dinámicos topológicos cuyo espacio de fase es un espacio simbólico con la dinámica definida por la función shift.

1.2. Espacios simbólicos.

Un *alfabeto* es un conjunto finito de símbolos Σ que contiene al menos dos elementos distintos. Por ejemplo, $\Sigma = \{0, 1\}$ es un alfabeto.

El espacio de las sucesiones infinitas de símbolos sobre Σ es el conjunto

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \geq 0} : x_n \in \Sigma, \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

De igual forma se define el conjunto de las sucesiones bi-infinitas de símbolos sobre Σ como

$$\Sigma^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \Sigma, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observación 1 *Por comodidad, a partir de ahora restringiremos nuestro estudio al espacio $\Sigma^{\mathbb{Z}}$. Hay que notar que esto no afectará la generalidad de los resultados, pues la mayoría de las propiedades de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ pueden fácilmente extenderse a $\Sigma^{\mathbb{N}}$.*

Sean $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dos elementos de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$. Se define la distancia entre x e y como

$$d(x, y) = 2^{-\min\{|n| : n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x_n \neq y_n\}}.$$

Ejercicio 1 Probar que d es una métrica.

Según la métrica d , la distancia entre x e y es pequeña si en torno a la coordenada 0, las sucesiones x e y coinciden a la derecha como a la izquierda hasta una coordenada suficientemente grande. La distancia máxima que puede haber entre x e y es 1, y esto ocurre cuando x e y difieren en la coordenada 0.

Consideraremos a $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ equipado con la topología generada por la métrica d .

Una *palabra* de largo $k > 0$ sobre Σ es una concatenación $w = w_0 \cdots w_{k-1}$ de k símbolos de Σ . Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$ y $k = 4$ entonces $w = 0110$ es una palabra de largo k sobre Σ . Si $w = w_0 \cdots w_{k-1}$ es una palabra sobre Σ , denotamos por $|w|$ su largo. Si $0 \leq i \leq j \leq k - 1$, entonces $w_{[i,j]}$ representa a la palabra $w_i \cdots w_j$ y $w_{(i,j)}$ a la palabra $w_i \cdots w_{j-1}$.

Sea $i \in \mathbb{Z}$ y sea $w = w_0 \cdots w_{k-1}$ una palabra sobre Σ . El *cilindro* que fija todas las coordenadas entre la coordenada i y la coordenada $i + k - 1$ con la palabra w es el conjunto

$$[w]_i = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : x_{i+s} = w_s \text{ para todo } 0 \leq s \leq k - 1\}.$$

Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$, $i = 0$ y $w = 0$, entonces $[w]_i$ es el conjunto de todas las sucesiones bi-infinitas de 0's y 1's que empiezan con un 0.

Los cilindros son conjuntos abiertos y cerrados. Además, son una base de la topología de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Ejercicio 2 Probar que los cilindros son abiertos y cerrados, y que forman una base de la topología de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$.

La topología de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ definida por la métrica d coincide con la topología producto cuando Σ está equipado con la topología discreta. A partir de esto es fácil deducir que $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ es compacto, pues Σ es compacto y el producto de compactos es compacto. Más aun, $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un conjunto de Cantor, pues su topología posee una base numerable de conjuntos abiertos cerrados (basta tomar los cilindros de la forma $[w]_i$, con $i < 0$ y $|w| = 2|i| + 1$) y no posee puntos aislados (un cilindro contiene el menos dos elementos).

Definición 1 Un espacio simbólico es un subconjunto cerrado X de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$. Un sistema dinámico simbólico es un sistema dinámico topológico (X, T) tal que X es un espacio simbólico.

1.3. Subshifts.

Por lo discutido al inicio de la Sección 1, es natural definir sobre $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ la transformación σ que a cada sucesión x le entrega x trasladada un lugar hacia la izquierda. Esta transformación se conoce como *función shift* y está definida por

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \text{ para todo } (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}.$$

Claramente, σ es biyectiva y su inversa es la función que traslada cada sucesión un lugar hacia la derecha. Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $x = \cdots 00.100 \cdots$ es la sucesión que contiene sólo ceros excepto en la coordenada cero, entonces $\sigma(x) = \cdots 001.00 \cdots$ y $\sigma^{-1}(x) = \cdots 0.0100 \cdots$.

Observación 2 La función shift también puede definirse sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Sin embargo, en este caso ya no es invertible pues una sucesión tiene tantas pre imágenes como elementos hay en Σ .

Ejercicio 3 Probar que $\sigma : \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un homeomorfismo.

Al ser σ una función continua, $(\Sigma^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es un sistema dinámico simbólico. Este sistema se conoce como *full-shift*.

Definición 2 Un subshift es un subconjunto cerrado $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma(X) = X$.

Si $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un subshift, entonces $(X, \sigma|_X)$ es un sistema dinámico simbólico. Estos sistemas dinámicos simbólicos se conocen igualmente como *subshifts*. De la definición anterior se deduce que el full-shift es un subshift.

Ejercicio 4 Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Probar que el conjunto $X = \overline{o_\sigma(x)} = \overline{\{\sigma^n(x) : n \geq 0\}}$ es un subshift.

Los subshifts constituyen una de las clase más importantes de sistemas dinámicos simbólicos. El objetivo de este curso es estudiar algunos ejemplos de aquellos de tipo minimal.

2. Subshifts de sustitución.

Una de las formas más simples de construir sistemas simbólicos minimales interesantes es por medio de sustituciones. La exposición de este capítulo está basada principalmente en [6]. Otra referencia conocida es [8].

Sea Σ un alfabeto. Denotamos por Σ^* al conjunto de todas las palabras sobre Σ . Sean u y v dos elementos de Σ^* . Se dice que u aparece en v (se escribe $u \prec v$), si existe $1 \leq j \leq m$ tal que $j + |u| - 1 \leq m$ y $u = v_{[j, j+|u|-1]}$.

Definición 3 Una sustitución sobre Σ es una función $\omega : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$.

Observar que una sustitución ω sobre Σ se puede extender a Σ^* por concatenación de la manera siguiente: si $u = u_1 \cdots u_n \in \Sigma^*$ entonces $\omega(u) = \omega(u_1) \cdots \omega(u_n)$. De esta forma, ω también se extiende a $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ definiendo

$$\omega(x) = \cdots \omega(x_{-2})\omega(x_{-1})\omega(x_0)\omega(x_1)\omega(x_2) \cdots, \text{ para todo } x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}.$$

La matriz de sustitución asociada a ω es la matriz cuadrada $|\Sigma|$ -dimensional M_ω definida por

$$M_\omega(a, b) = \text{número de veces que } b \text{ aparece en } \omega(a),$$

para todo $a, b \in \Sigma$.

Ejercicio 5 Sea n un entero positivo. Probar que la matriz asociada a la sustitución ω^n es M_ω^n .

La sustitución ω es primitiva si existe $n > 0$ tal que para todo $a, b \in \Sigma$ se tiene $b \prec \omega^n(a)$. Es fácil ver que la sustitución ω es primitiva si y sólo si la matriz M_ω es primitiva, es decir, si existe $n > 0$ tal que $M_\omega^n > 0$.

Ejemplos: $\Sigma = \{0, 1\}$

1. Sustitución de Feigenbaum

$$\omega = \begin{cases} 0 & \rightarrow 11 \\ 1 & \rightarrow 10 \end{cases} \quad M_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sustitución de Fibonacci

$$\omega = \begin{cases} 0 & \rightarrow 1 \\ 1 & \rightarrow 10 \end{cases} \quad M_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sustitución de Morse.

$$\omega = \begin{cases} 0 & \rightarrow 01 \\ 1 & \rightarrow 10 \end{cases} \quad M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sustitución de Cantor

$$\omega = \begin{cases} 0 & \rightarrow 010 \\ 1 & \rightarrow 111 \end{cases} \quad M_\omega = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Entre estos ejemplos, la única sustitución no primitiva es la de Cantor.

El *lenguaje* de la sustitución ω es el conjunto \mathcal{L}_ω que contiene todas las palabras $u \in \Sigma^*$ para las que existen $a \in \Sigma$ y $n > 0$ tales que $u \prec \omega^n(a)$.

El subshift asociado a ω es el conjunto X_ω de todas las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $i \geq 0$ la palabra $x_n \cdots x_{n+i}$ está en \mathcal{L}_ω .

Ejercicio 6 Sea ω una sustitución primitiva. Probar que $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_{\omega^n}$, para todo $n > 0$.

Ejercicio 7 Probar que X_ω es un subshift, es decir, que X_ω es cerrado e invariante por σ .

Ejercicio 8 Probar que para todo $x \in X_\omega$ la sucesión $\omega(x)$ está en X_ω .

El sistema dinámico $(X_\omega, \sigma|_{X_\omega})$ se conoce como *subshift de sustitución* asociado a ω .

2.1. Puntos periódicos de la sustitución.

Una sucesión $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un *punto periódico* de la sustitución ω si existe $n > 0$ tal que $\omega^n(x) = x$.

Proposición 3 Toda sustitución ω sobre Σ posee un punto periódico $x_0 \in X_\omega$.

Dem. Sea ω una sustitución sobre Σ , y sea $ab \in \mathcal{L}_\omega$. Como el conjunto de palabras de largo 2 sobre Σ es finito, existen $0 < n < m$, a_0 y b_0 en Σ tales que b_0 es la primera letra de $\omega^n(b)$ y $\omega^m(b)$, y a_0 es la última letra de $\omega^n(a)$ y $\omega^m(a)$. Ya que $ab \in \mathcal{L}_\omega$, entonces a_0b_0 también está en \mathcal{L}_ω . Si $k = m - n$

entonces para todo $n > 0$, $\omega^{kn}(b_0)$ comienza con la palabra $\omega^{k(n-1)}(b_0)$ y $\omega^{kn}(a_0)$ termina con la palabra $\omega^{k(n-1)}(a_0)$. Esto implica que los conjuntos $C_n = [\omega^{kn}(a_0)\omega^{kn}(b_0)]_{-|\omega^{kn}(a_0)|}$ verifican $C_{n+1} \subseteq C_n$. Esta propiedad más la compacidad de estos conjuntos aseguran la existencia de un elemento $x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} C_n$, que además es único pues el diámetro de los conjuntos C_n converge a 0 con n . Debido a que $\omega^k(x_0)$ está también en la intersección, se deduce que $\omega^k(x_0) = x_0$.

Para toda palabra u de x_0 existe $n > 0$ tal que $u \prec \omega^{kn}(a_0b_0)$. Además, existe $m > 0$ y $c \in \Sigma$ tal que $a_0b_0 \prec \omega^m(c)$. Luego, la palabra u aparece en $\omega^{m+n}(c)$, lo que muestra que $x_0 \in X_\omega$. \square

Ejercicio 9 Sea ω una sustitución primitiva y sea $x \in X_\omega$ un punto periódico de ω . Probar que para toda $u \in \mathcal{L}_\omega$ existe $n \geq 0$ tal que $x_n \cdots x_{n+|u|-1} = u$. Deduzca que $X_\omega = \overline{o_\sigma(x)}$.

Observación 4 Del Ejercicio 6 se deduce que para una sustitución primitiva ω se tiene $X_\omega = X_{\omega^n}$ para todo $n > 0$. Esto nos permite suponer sin pérdida de generalidad que un punto periódico x de ω es un punto fijo, es decir, $\omega(x) = x$.

2.2. Minimalidad.

En lo que sigue usaremos el siguiente resultado de álgebra lineal.

Teorema 5 (Teorema de Perron-Frobenius) Sea M una matriz primitiva. Existe un valor propio positivo λ de M y un vector propio positivo \vec{v} de M asociado a λ tal que:

1. Cualquier otro vector propio asociado a λ es un múltiplo de \vec{v} .
2. Si ρ es un valor propio de M distinto de λ entonces $\lambda > |\rho|$.
3. Si \vec{u} es un vector propio izquierdo de M asociado a λ tal que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{\lambda^n} = L,$$

donde $L = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

El valor propio λ se conoce como radio espectral de M .

Sea $\omega : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ una sustitución. Definimos

$$|\omega| = \min\{|\omega(a)| : a \in \Sigma\} \text{ y } \|\omega\| = \max\{|\omega(a)| : a \in \Sigma\}.$$

Proposición 6 *Sea ω una sustitución primitiva sobre Σ y sea λ el radio espectral de M_ω . Entonces existen $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1$ tales que para todo $k > 0$,*

$$\alpha_0 \lambda^k \leq |\omega^k| \leq \|\omega^k\| \leq \alpha_1 \lambda^k.$$

Dem. Sea $\vec{v} > 0$ un vector propio de la matriz M_ω asociado a λ . Sean $t = \min\{\vec{v}_a : a \in \Sigma\}$ y $s = \max\{\vec{v}_a : a \in \Sigma\}$.

Para todo $a \in \Sigma$ se tiene

$$t \sum_{b \in \Sigma} M_\omega^k(a, b) \leq \sum_{b \in \Sigma} M_\omega^k(a, b) \vec{v}_b = \lambda^k \vec{v}_a \leq \lambda^k s.$$

De igual forma se obtiene que

$$t \lambda^k \leq \sum_{b \in \Sigma} M_\omega^k(a, b).$$

Definiendo $\alpha_0 = t/s$ y $\alpha_1 = s/t$ se deduce que

$$\alpha_0 \lambda^k \leq \sum_{b \in \Sigma} M_\omega^k(a, b) \leq \alpha_1 \lambda^k.$$

A partir de que para todo $a \in \Sigma$, $|\omega^k(a)| = \sum_{b \in \Sigma} M^k(a, b)$, se concluye la proposición. \square

Proposición 7 *Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ un punto periódico de una sustitución primitiva ω . Entonces existe una constante $L > 0$ tal que toda palabra u de x aparece en toda palabra v de x con $|v| \geq L|u|$.*

Dem. Sea λ el radio espectral de M_ω . Como ω es primitiva, existe un entero $q > 0$ tal que toda palabra de largo dos de x aparece en $\omega^q(x_0)$, y existe un entero $s > 0$ tal que x_0 aparece en $\omega^s(a)$, para todo $a \in \Sigma$.

Definimos $L = 2\lambda^{q+s+1}\alpha_1/\alpha_0$, donde α_0 y α_1 son las constantes de la Proposición 6.

Sea u una palabra de x . Existe un único $k > 0$ tal que $|\omega^{k-1}| < |u| \leq |\omega^k|$. Sean $m_0 = 2\|\omega^{k+q+s}\|$ y v una palabra de largo m_0 de x . Debido a que x

es un punto periódico de ω (podemos suponer que es fijo) y que el largo de u está acotado superiormente por $|\omega^k|$, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que u aparece en $\omega^k(x_i x_{i+1})$. Luego, para todo $a \in \Sigma$

$$u \prec \omega^{q+k}(x_0) \prec \omega^{s+q+k}(a).$$

Por otro lado, el largo de v implica que existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\omega^{s+q+k}(x_i) \prec v$, lo que muestra que $u \prec v$.

Finalmente, de la desigualdad

$$L|u| \geq 2\lambda^{q+s+1} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} |\omega^{k-1}| \geq 2\lambda^{q+s+1} \alpha_1 \lambda^{k-1} \geq 2\|\omega^{q+s+k}\| = m_0,$$

se deduce que u aparece en todas las palabras de largo mayor o igual que $L|u|$ de x . \square

Una sucesión $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es *uniformemente recurrente* si para toda palabra u de x existe $R > 0$ tal que $u \prec v$, para toda palabra v de x con $|v| \geq R$. Una sucesión $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es *linealmente recurrente* si existe $L > 0$ tal que toda palabra u de x aparece en toda palabra de x de largo $L|u|$. Claramente, toda sucesión linealmente recurrente es uniformemente recurrente, no así al revés. La Proposición 7 implica que los puntos periódicos de una sustitución primitiva son linealmente recurrentes.

Proposición 8 *Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Entonces x es uniformemente recurrente si y sólo si $\overline{o_\sigma(x)}$ es minimal.*

Dem. Supongamos que $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ no es uniformemente recurrente. Luego, existe una palabra u de x y una sucesión creciente de enteros positivos $(m_n)_{n \geq 0}$ tal que para todo $n \geq 0$, existe una palabra v_n de x de largo m_n que no contiene a u . Esto implica la existencia de un punto $y \in \overline{o_\sigma(x)}$ cuya órbita no interseca al cilindro $[u]_0$, lo que muestra que $\overline{o_\sigma(x)}$ no es minimal.

Supongamos que $\overline{o_\sigma(x)}$ no es minimal. Luego, existe $y \in \overline{o_\sigma(x)}$ y una palabra u de x tal que $o_\sigma(y) \cap [u]_0 = \emptyset$. Por otro lado, para todo $n > 0$ existe $m_n \geq 0$ tal que $y_{[-n, n]} = \sigma^{m_n}(x)_{[-n, n]}$. Esto implica que u no aparece en la palabra $x_{[-n+m_n, n+m_n]}$, lo que muestra que x no es uniformemente recurrente. \square

Corolario 1 *Sea ω una sustitución primitiva. El sistema dinámico (X_ω, σ) es minimal.*

Dem. De las Proposiciones 7 y 8 se deduce que si x es un punto periódico de la sustitución entonces $\overline{o_\sigma(x)}$ es minimal. Del Ejercicio 9 concluimos que (X_ω, σ) es minimal. \square

Para todo subshift $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ y para todo $n > 0$ se define $\mathcal{L}_n(X)$ como el conjunto de palabras de largo n de las sucesiones en X . La *entropía topológica* del subshift es igual al límite siguiente:

$$h_{top}(X, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{L}_n(X)|)}{n}.$$

El número $h_{top}(X)$ es no negativo y finito. Si ω es una sustitución primitiva entonces la Proposición 7 implica que existe $L > 0$ tal que para todo $n > 0$,

$$|\mathcal{L}_n(X_\omega)| \leq nL.$$

De esto se deduce que

$$h_{top}(X_\omega, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{L}_n(X_\omega)|)}{n} = 0.$$

Los subshifts de sustitución son entonces subshifts de entropía topológica nula.

2.3. Frecuencias.

Definición 4 Sea $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ un subshift. Se dice que (X, σ) es estrictamente ergódico si para toda palabra $u \in \mathcal{L}(X)$ existe un número positivo μ_u tal que para todo $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{[0,n]}|_u}{n} = \mu_u.$$

Cuando μ_u existe se llama frecuencia de u .

La órbita de un punto de un subshift estrictamente ergódico intersecta todo cilindro, por lo tanto, es densa. Esto implica que los subshifts estrictamente ergódicos son minimales. Sin embargo, no todo subshift minimal es estrictamente ergódico.

Del Teorema Ergódico (ver por ejemplo [9]) se deduce que los subshifts estrictamente ergódicos son únicamente ergódicos, es decir, poseen una única medida de probabilidad invariante. Esta única medida μ está completamente

determinada por los valores que toma en los cilindros, y estos están dados por

$$\mu([u]_i) = \mu_u, \text{ para todo } u \in \mathcal{L}(X) \text{ y todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Recíprocamente, todo subshift únicamente ergódico y minimal es estrictamente ergódico.

En lo que sigue siempre supondremos que ω es una sutitución primitiva sobre Σ , y probaremos que (X_ω, σ) es estrictamente ergódico.

Sea λ el radio espectral de M_ω , \vec{u} el vector propio izquierdo de M_ω cuyas coordenadas suman 1 y \vec{v} en vector propio derecho de M_ω asociado a λ tal que $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 1$.

Proposición 9 *Para todo $x \in X_\omega$ y todo $b \in \Sigma$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{[0,n]}}{n} = \vec{u}_b.$$

Dem. Por el Teorema de Perron-Frobenius, para todo $a, b \in \Sigma$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\omega^k(a)|_b}{\lambda^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_\omega^k(a, b)}{\lambda^k} = \vec{v}_a \vec{u}_b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\omega^k(a)|}{\lambda^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{b \in \Sigma} \frac{M_\omega^k(a, b)}{\lambda^k} = \vec{v}_a, \end{aligned}$$

lo que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\omega^k(a)|_b}{|\omega^k(a)|} = \vec{u}_b.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que para todo $a, b \in \Sigma$

$$|\omega^k(a)|(\vec{u}_b - \varepsilon) \leq |\omega^k(a)|_b \leq |\omega^k(a)|(\vec{u}_b + \varepsilon). \quad (2.1)$$

Sea $n > 0$. Existe $m > 0$ y $a \in \Sigma$ tal que $x_{[0,n]} \prec \omega^{m+k}(a)$. Tomando $z^{(n)} = \omega^k(a)$ tenemos que $x_{[0,n]} \prec \omega^k(z)$. Si $z^{(n)} = z_0 \cdots z_{r-1}$, entonces $z^{(n)}$ se puede escoger de manera que

$$\omega^k(y^{(n)}) \prec x_{[0,n]} \prec \omega^k(z^{(n)}),$$

donde $y^{(n)} = z_1 \cdots z_{r-2}$. Ya que $0 \leq |\omega^k(z^{(n)})| - |\omega^k(y^{(n)})| \leq 2\|\omega^k\|$, cuando $n \rightarrow \infty$ y k está fijo, $|\omega^k(z^{(n)})|/n$ y $|\omega^k(y^{(n)})|/n$ tienden a 1. Esto implica que para n suficientemente grande,

$$|\omega^k(z^{(n)})|(1 - \varepsilon) \leq n \leq |\omega^k(y^{(n)})|(1 + \varepsilon). \quad (2.2)$$

Por otro lado, de la ecuación (2.1) se obtiene que

$$|\omega^k(y^{(n)})|_{(\vec{u}_b - \varepsilon)} \leq |\omega^k(y)|_b \leq |x_{[0,n]}|_b \leq |\omega^k(z^{(n)})| \leq |\omega^k(z^{(n)})|_{(\vec{u}_b + \varepsilon)}. \quad (2.3)$$

Combinando (2.2) y (2.3) tenemos que

$$\frac{\vec{u}_b - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \leq \frac{|x_{[0,n]}|_b}{n} \leq \frac{\vec{u}_b + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{[0,n]}|_b}{n} = \vec{u}_b.$$

□

Para calcular la frecuencia de las palabras de largo 2 consideramos un nuevo alfabeto $\Sigma_2 = \mathcal{L}_2(X_\omega)$, y definimos una sustitución ω_2 sobre Σ_2 como

$$\omega_2(ab) = \omega(ab)_{[0,1]} \omega(ab)_{[1,2]} \cdots \omega(ab)_{[|\omega(a)|-1, |\omega(a)|]}.$$

Esta nueva sustitución también es primitiva.

Se define la función $\varphi : X_\omega \rightarrow \Sigma_2^{\mathbb{Z}}$ como

$$\varphi(x) = \cdots (x_{-2}x_{-1})(x_{-1}x_0) \cdot (x_0x_1)(x_1x_2)(x_2x_3) \cdots .$$

Ejercicio 10 *Probar que φ es continua, inyectiva, $\varphi \circ \omega = \omega_2 \circ \varphi$ y que $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.*

La continuidad de φ implica que $\varphi(X_\omega) \subseteq \Sigma_2^{\mathbb{Z}}$ es un subshift minimal. Por otro lado, los elementos de $\varphi(X_\omega)$ están en X_{ω_2} , lo que implica que $X_{\omega_2} = X_\omega$. Aplicando la Proposición 9 a ω_2 se prueba que las frecuencias de las palabras de largo 2 de X_ω existen. Construyendo el alfabeto $\Sigma_p = \mathcal{L}_p(X_\omega)$, de manera análoga al caso $p = 2$ se prueba que las frecuencias de las palabras de largo p existen. Podemos entonces enunciar el siguiente teorema.

Teorema 10 *El subshift (X_ω, σ) es estrictamente ergódico.*

3. Subshifts Sturmianos.

Sea $\alpha \in [0, 1]$ y S^1 el círculo unitario. Se define la *rotación* en ángulo $2\pi\alpha$ como la función $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $R_\alpha(z) = \exp(2i\pi\alpha)z$ para todo $z \in S^1$. Si representamos S^1 por el intervalo $[0, 1)$, entonces $r_\alpha(x) = (x + \alpha) \bmod 1$, para todo $x \in [0, 1)$.

Ejercicio 11 *El sistema (S^1, R_α) es minimal si y sólo si α es irracional.*

Sea $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Definimos $V_0 = [0, 1 - \alpha]$, $V_1 = [1 - \alpha, 1)$, y

$$V_\alpha^0 = \{V_0, V_1\}.$$

Sea $n > 0$ y $V_\alpha^n = \{R_\alpha^{-n}(V_0), R_\alpha^{-n}(V_1)\}$. El refinamiento de $V_\alpha^0, \dots, V_\alpha^{n-1}$ es la colección

$$V_\alpha^{0,n-1} = \bigvee_{k=0}^{n-1} V_\alpha^k = \{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} : A_k \in V_\alpha^k, \forall 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Ejercicio 12 *Probar que $V_\alpha^{0,n-1}$ está formada por $n+1$ intervalos cuyos puntos de corte son $\{0, R_\alpha^{-1}(0), \dots, R_\alpha^{-n}(0)\}$.*

Un *itinerario* de un punto $x \in [0, 1)$ es una sucesión $(x_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \geq 0$,

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } R_\alpha^n(x) \in V_0 \\ 1 & \text{si } R_\alpha^n(x) \in V_1 \end{cases}$$

Los puntos que están en la órbita de $1 - \alpha$ tienen dos itinerarios. El resto de los puntos sólo tiene uno. Llamamos $I(x)$ al conjunto de itinerarios de x , y X_α al subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de todos los itinerarios de puntos de $[0, 1)$.

Ejercicio 13 *Probar que X_α es un subshift.*

Si x e y son tales que $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$, entonces x e y pertenecen al mismo conjunto de $V_\alpha^{0,n}$, para todo $n \geq 0$. Luego, $x = y$. Esto permite definir una función $\varphi : X_\alpha \rightarrow [0, 1)$ como

$$\varphi((x_n)_{n \geq 0}) = x \text{ si y sólo si } (x_n)_{n \geq 0} \in I(x).$$

Esta función es sobreyectiva, y es inyectiva salvo en los puntos cuya imagen está en la órbita de $1 - \alpha$. Además es continua y verifica $\varphi \circ \sigma = R_\alpha \circ \varphi$. Todas estas propiedades de φ hacen de (X_α, σ) una *extensión simbólica* de (S^1, R_α) , y a (S^1, R_α) un *factor* de (X_α, σ) .

Definición 5 (X_α, σ) es el subshift Sturmiano asociado a α .

Hay una biyección entre $\mathcal{L}_n(X_\alpha)$ y los elementos de la colección $V_\alpha^{0, n-1}$. En efecto, al conjunto (no vacío) $V_{i_0} \cap R^{-1}(V_{i_1}) \cap \dots \cap R_\alpha^{n-1}(V_{i_{n-1}})$ le corresponde la palabra $i_0 \dots i_{n-1} \in \mathcal{L}_n(X_\alpha)$. Recíprocamente, si $u = u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathcal{L}_n(X_\alpha)$ entonces $V_{u_0} \cap R^{-1}(V_{u_1}) \cap \dots \cap R_\alpha^{n-1}(V_{u_{n-1}})$ es un conjunto no vacío de V_α^{n-1} .

Proposición 11 (X_α, σ) es estrictamente ergódico y tiene entropía topológica nula.

Dem. Un subshift Sturmiano tiene $n + 1$ palabras de largo n . Esto implica que su entropía topológica es igual a 0.

La estricta ergodicidad de (X_α, σ) se deduce de la estricta ergodicidad de (S^1, S_α) . \square

4. Subshifts de Toeplitz.

La clase de los subshifts de Toeplitz es una clase bastante rica de sistemas dinámicos, donde podemos encontrar sistemas con cualquier conjunto de medidas de probabilidad dado y con muchos valores de entropía posibles.

Las sucesiones de Toeplitz fueron introducidas en sistemas dinámicos por Jacobs y Keane en [5]. Desde entonces, los subshifts generados por estas sucesiones han sido estudiados extensivamente y han sido usados para proveer una serie de ejemplos con interesantes propiedades dinámicas (ver por ejemplo [1], [2], [3], [10]).

4.1. Sucesiones de Toeplitz.

Sea Σ un alfabeto. Una sucesión $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es de *Toeplitz* si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m > 0 \text{ tal que } x_n = x_{n+km} \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, una sucesión es Toeplitz si para cada coordenada existe un período. Las sucesiones periódicas con respecto a la función shift son trivialmente de Toeplitz. Los puntos fijos de las sustituciones de largo constante y propias son de Toeplitz.

Ejemplo: Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea ω la sustitución sobre Σ definida por

$$\omega = \begin{cases} 0 & \longrightarrow 100 \\ 1 & \longrightarrow 110 \end{cases}$$

El único punto x en la intersección $\bigcap_{n \geq 0} [\omega^n(0) \cdot \omega^n(1)]_{-3^n}$ es una sucesión de Toeplitz. Cada coordenada de x es periódica con algún período del conjunto $\{3^n : n > 0\}$.

Para $p > 0$ entero y $a \in \Sigma$ definimos

$$Per_p(x, a) = \{n \in \mathbb{Z} : x_n = x_{n+kp} = a, \forall k \in \mathbb{Z}\} \text{ y } Per_p(x) = \bigcup_{a \in \Sigma} Per_p(x, a).$$

Se dice que p es un *período* de x si $Per_p(x) \neq \emptyset$. Un período p de x es *esencial* si $Per_p(x) \subseteq Per_q(x)$ implica que q es un múltiplo de p .

Lema 12 *Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ una sucesión de Toeplitz y sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $p = \min\{s > 0 : n \in Per_s(x)\}$ es un período esencial de x tal que $n \in Per_p(x)$.*

Dem. Si p no es un período esencial, entonces existe un período q de x tal que $q = kp + r$, para algún $k \geq 0$ y $1 \leq r < p$, y tal que $Per_p(x) \subseteq Per_q(x)$. Pero esto implica que $n \in Per_r(x)$, lo que contradice la elección de p . \square

Definición 6 *Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ una sucesión de Toeplitz. Una sucesión creciente de enteros positivos $(p_n)_{n \geq 0}$ e una estructura de períodos de x si verifica las siguientes condiciones:*

1. p_n divide a p_{n+1} , para todo $n \geq 0$.
2. p_n es un período esencial de x , para todo $n \geq 0$.
3. $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \geq 0} Per_{p_n}(x)$.

Ejercicio 14 *Sean p_1, \dots, p_k períodos esenciales de x . Probar que $m.c.m\{p_1, \dots, p_k\}$ es un período esencial de x .*

Lema 13 *Toda sucesión de Toeplitz posee una estructura de períodos.*

Dem. Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ una sucesión de Toeplitz. Sea p_0 un período esencial de x tal que $0 \in Per_{p_0}(x)$. Sean q_1 y q_{-1} períodos esenciales de x tales que $1 \in Per_{q_1}(x)$ y $-1 \in Per_{-q_1}(x)$. El entero $p_1 = m.c.m\{q_{-1}, p_0, q_1\}$ es un período esencial de x tal que las coordenadas $-1, 0, 1$ son periódicas con período p_1 . Además, p_0 divide a p_1 . Si $n > 0$ y suponiendo que hemos escogido p_0, \dots, p_n tal que $-n, \dots, n$ están en $Per_{p_n}(x)$, basta tomar $p_{n+1} = m.c.m\{q_{-(n+1)}, p_n, q_n\}$, donde $q_{-(n+1)}$ y q_{n+1} son períodos esenciales de x tales que $n+1 \in Per_{q_{n+1}}(x)$ y $-(n+1) \in Per_{-q_{n+1}}(x)$. \square

4.2. Subshifts de Toeplitz.

Un subconjunto X de $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un *subshift de Toeplitz* si existe una sucesión de Toeplitz $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = \overline{o_\sigma(x)}$. Claramente, un subshift de Toeplitz es cerrado e invariante por el shift (por lo tanto, es un subshift). Además, si X es un subshift de Toeplitz entonces X es minimal, pues toda sucesión de Toeplitz es uniformemente recurrente.

Sea X un subshift de Toeplitz igual a la cerradura de la órbita de una secuencia de Toeplitz $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Sea $(p_n)_{n \geq 0}$ una estructura de períodos de x . Para cada $n \geq 0$ y cada $0 \leq j < p_n$ se define

$$A_j^n = \overline{\{\sigma^{j+kp_n}(x) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Ejercicio 15 Probar que $\sigma(A_j^n) = A_{j+1}^n$ para todo $0 \leq j < p_n - 1$ y que $\sigma(A_{p_n-1}^n) = A_0^n$.

Muestre que $\mathcal{P}_n = \{\sigma^j(A_0^n) : 0 \leq j < p_n\}$ es un recubrimiento de X .

Lema 14 Para cada $n \geq 0$, la colección \mathcal{P}_n es una partición abierta cerrada de X .

Dem. Para esto basta probar que los elementos de \mathcal{P}_n son disjuntos.

Supongamos que existe $0 < m < p_n$ tal que $\sigma^m(A_0^n) \cap A_0^n \neq \emptyset$. Esto implica $\sigma^m(A_0^n) = A_0^n$ pues los sistemas dinámicos $(\sigma^m(A_0^n), \sigma^{p_n})$ y (A_0^n, σ^{p_n}) están bien definidos y son minimales. Como $x \in A_0^n = \sigma^m(A_0^n)$, entonces existe una subsucesión de $(\sigma^{m+kp_n}(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ que converge a x . Como $Per_{p_n}(\sigma^m(x), a) = Per_{p_n}(\sigma^{m+kp_n}(x), a)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $a \in \Sigma$, esto implica que $Per_{p_n}(\sigma^m(x), a) = Per_{p_n}(x, a)$. Por otro lado, es fácil ver que $Per(x, a) = Per(\sigma^m(x), a) + s$ para todo $a \in \Sigma$. Combinando esto con la igualdad anterior obtenemos que $Per_{p_n}(x) \subseteq Per_m(x)$, lo que contradice el hecho que p_n es período esencial. \square

4.3. Odometros.

Sea $\mathbf{p} = (p_n)_{n \geq 0}$ una sucesión creciente de enteros positivos tales que p_n divide a p_{n+1} , para todo $n \geq 0$. Gracias a esta última propiedad, la función $\pi_n : \mathbb{Z}/p_{n+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ que a cada clase $[m]_{n+1} \in \mathbb{Z}/p_{n+1}\mathbb{Z}$ le asigna la clase $[m]_n \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ está bien definida. El *odometro* generado por la sucesión \mathbf{p} es el conjunto

$$G_{\mathbf{p}} = \{(g_n)_{n \geq 0} \in \prod_{n \geq 0} \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z} : \pi_n(g_{n+1}) = g_n, \forall n \geq 0\}.$$

Equipando a cada conjunto $\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ de la topología discreta y a $\prod_{n \geq 0} \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ de la topología producto, se obtiene que $G_{\mathbf{p}}$ es un Cantor.

Sobre $G_{\mathbf{p}}$ se define la función $T : G_{\mathbf{p}} \rightarrow G_{\mathbf{p}}$ como $T((g_n)_{n \geq 0}) = (g_n +_n 1)_{n \geq 0}$, donde $+_n$ representa la suma en $\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$. Esta función es continua y $(G_{\mathbf{p}}, T)$ es estrictamente ergódico.

Sea X un subshift de Toeplitz que se obtiene como la cerradura de la órbita de una sucesión de Toeplitz $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Sea $\mathbf{p} = (p_n)_{n \geq 0}$ una estructura de períodos de x y $G_{\mathbf{p}}$ el odometro definido por \mathbf{p} .

Para cada $n \geq 0$, sea $\mathcal{P}_n = \{\sigma^j(A_0^n) : 0 \leq j < p_n\}$ la partición de X definida en la Sección 4.2. Definimos $\varphi_n X \rightarrow \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ como

$$\varphi_n(y) = j \text{ si y sólo si } y \in \sigma^j(A_0^n).$$

y $\varphi : X \rightarrow G_{\mathbf{p}}$ por $\varphi(y) = (\varphi_n(y))_{n \geq 0}$, para todo $y \in X$.

Ejercicio 16 *Probar que φ está bien definida y que $\varphi \circ \sigma = T \circ \varphi$. Muestre que la única preimagen de $0 \in G_{\mathbf{p}}$ por φ es la sucesión de Toeplitz x .*

Del ejercicio anterior se deduce que $(G_{\mathbf{p}}, T)$ es un *factor* de (X, σ) , y que (X, σ) es una extensión casi uno a uno de $(G_{\mathbf{p}}, T)$. Esto implica que $(G_{\mathbf{p}}, T)$ es el factor equicontinuo maximal de (X, σ) (ver [1]). Por otro lado, los subshifts de Toeplitz pueden ser caracterizados como las extensiones simbólicas casi uno a uno de los odómetros [3].

A diferencia de los subshifts de sustitución y los subshifts Sturmianos, los subshifts de Toeplitz no siempre son estrictamente ergódicos. El siguiente Teorema lo demuestra.

Teorema 15 ([1]) *Para todo simplex de Choquet metrizable K , existe un subshift de Toeplitz (X, σ) cuyo conjunto de medidas de probabilidad invariantes es afín homeomorfo a K .*

5. Subshifts de tipo finito.

Los subshifts de tipo finito son una de las clases más importantes de subshifts. A menos que sean finitos, estos subshifts no son minimales. En esta sección sólo entregamos la definición. Para conocer más de esta clase de sistemas mirar [7].

Sean Σ un alfabeto y \mathcal{F} un conjunto de palabras sobre Σ . Se define $X_{\mathcal{F}}$ como el conjunto de sucesiones $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ tales que ninguna palabra de \mathcal{F} aparece en x . Es decir,

$$X_{\mathcal{F}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : x_n \cdots x_{n+i} \notin \mathcal{F}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } i \geq 0\}.$$

Ejemplo: Si $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces $X_{\mathcal{F}} = \Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Ejemplo: Si $\Sigma = \{0, 1\}$ y $\mathcal{F} = \{11\}$ entonces

$$X_{\mathcal{F}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : x_n = 1 \Rightarrow x_{n+1} = 0\}.$$

Se dice que \mathcal{F} es el *conjunto de palabras prohibidas* de $X_{\mathcal{F}}$. El próximo teorema muestra que todo subshift es igual a un conjunto $X_{\mathcal{F}}$, y que todo conjunto $X_{\mathcal{F}}$ es un subshift.

Teorema 16 $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un subshift si y sólo si existe un conjunto de palabras \mathcal{F} sobre Σ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Dem. Sea \mathcal{F} un conjunto de palabras sobre Σ y sea $X = X_{\mathcal{F}}$. Si $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Supongamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Es claro que X es invariante, pues las palabras que aparecen en una sucesión x son las mismas que aparecen en $\sigma(x)$ y $\sigma^{-1}(x)$. Si $x \in X^c$ entonces existen $n \in \mathbb{Z}$ e $i \geq 0$ tal que $x_n \cdots x_{n+i} \in \mathcal{F}$. Luego, el cilindro $[x_n \cdots x_{n+i}]_n$ está contenido en X^c y contiene a x . Esto muestra que X^c es abierto.

Supongamos ahora que $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es un subshift. Si $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ entonces $X = X_{\mathcal{F}}$ con $\mathcal{F} = \emptyset$. Si $X \subsetneq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ entonces X^c es un abierto no vacío. Luego, para todo $x \in X^c$ existe $k = k(x) \geq 0$ tal que $[x_{-k(x)} \cdots x_{k(x)}]_{-k(x)} \subseteq X^c$. Definiendo $\mathcal{F} = \{x_{-k(x)} \cdots x_{k(x)} : x \in X^c\}$ se tiene que $X = X_{\mathcal{F}}$. \square

Definición 7 Un subshift $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ es de tipo finito si existe un conjunto finito \mathcal{F} de palabras sobre Σ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 17 Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de las sucesiones $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ tales que entre dos 1's consecutivos que aparecen en x hay un número impar de 0's. Probar que X es un subshift pero que no es un subshift de tipo finito.

Referencias

- [1] Downarowicz, T. *Survey of odometers and Toeplitz flows*, Contemporary Mathematics, **385** (2005), Algebraic and Topological Dynamics, May 1 - July 31, 2004, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany (Kolyada, Manin, Ward eds), pages 7-28.
- [2] Downarowicz, T. *The Choquet simplex of invariant measures for minimal flows*, Israel J. Math. **74** (1991), 241-256.
- [3] Downarowicz, T; Lacroix, Y. *Almost 1 – 1 extensions of Furstenberg-Weiss type and applications to Toeplitz flows*, Studia Math. (2) **130** (1998), 149–170.
- [4] Hadamard, J. *Les surfaces a courbures opposées et leurs lignes geodesiques*. Journal de Mathematiques Pures et Appliqué 4 (1898), 27-73.
- [5] Jacobs K; Keane, M. *0 – 1-sequences of Toeplitz type*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **13** 1969 123–131.
- [6] Kurka, P. *Topological and Symbolic Dynamics*. Cours Spécialisés Collection SMF.
- [7] Lind, D; Marcus, B. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [8] Queffelec, M. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [9] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [10] Williams, S. *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete (1) **67** (1984), 95–107.