

# Embaldosados desde un punto de vista matemático.

María Isabel Cortez

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación  
Universidad de Santiago.

8 de octubre de 2010

Embaldosados del plano.  
Clasificación de los embaldosados del plano.  
El problema de embaldosar el plano.  
Embaldosados de sustitución.  
Problemas relacionados con embaldosados.

## Piso de casa cubierto de baldosas.



Embaldosados del plano.

Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

## Panal de abejas.



Embaldosados del plano.  
Clasificación de los embaldosados del plano.  
El problema de embaldosar el plano.  
Embaldosados de sustitución.  
Problemas relacionados con embaldosados.

## Piso de casa cubierto de baldosas.







## Embaldosados del plano.

Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

Un **embaldosado del plano** es una descomposición del plano en regiones (baldosas), generalmente poligonales, que no se solapan.

## Embaldosados del plano.

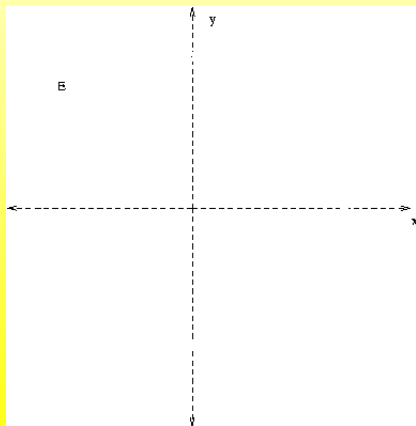
Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

# Embaldosado.



## Embaldosados del plano.

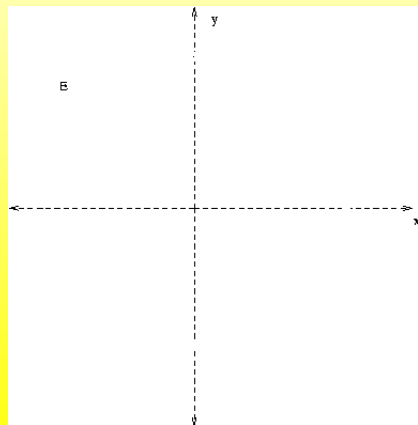
Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

# Embaldosado.



- ▶ En lugar del **piso**, consideramos el **plano E**.

## Embaldosados del plano.

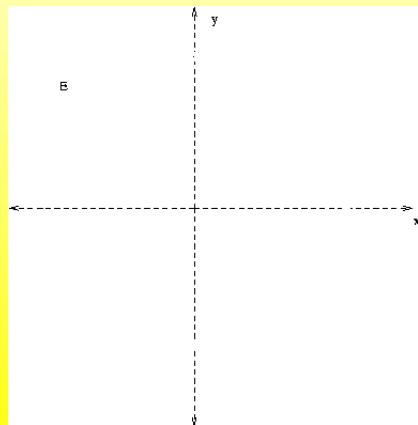
Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

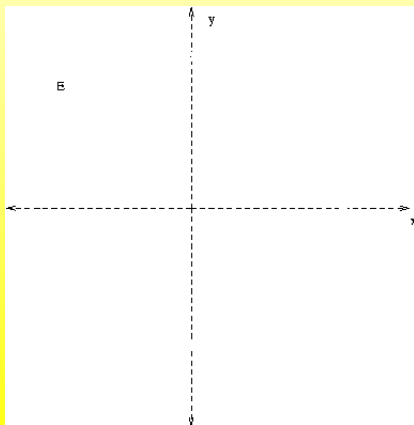
Problemas relacionados con embaldosados.

# Embaldosado.



- ▶ En lugar del **piso**, consideramos el **plano E**.

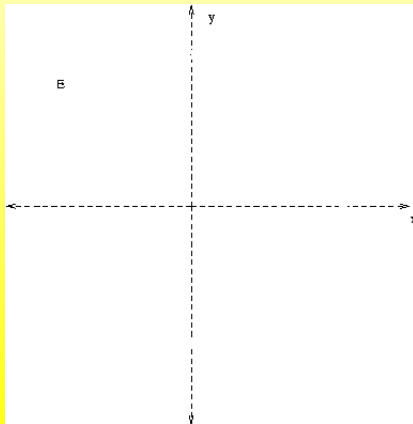
# Embalosado.



- ▶ En lugar del **piso**, consideramos el **plano  $E$** .
- ▶ En lugar de las **baldosas del piso**, consideramos **polígonos** en  $E$  verificando lo siguiente:

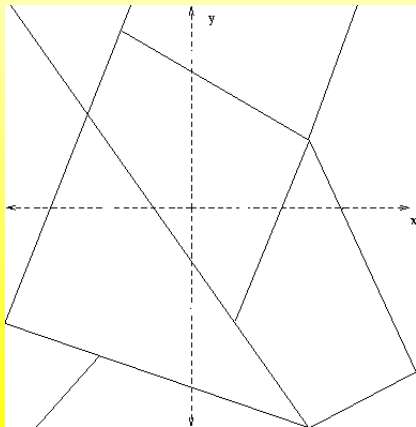


# Embaldosado.



- ▶ En lugar del **piso**, consideramos el **plano  $E$** .
- ▶ En lugar de las **baldosas del piso**, consideramos **polígonos** en  $E$  verificando lo siguiente:
  - ▶ la reunión de estos polígonos es igual a  $E$ .
  - ▶ los polígonos sólo se intersectan en los bordes.

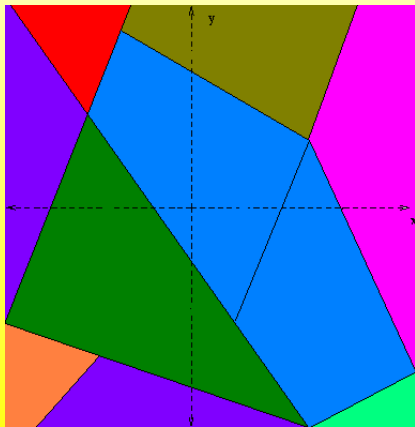
## Embaldosado.



- ▶ En lugar del **piso**, un gran **cuadrado en el plano**.
- ▶ En lugar de las **baldosas del piso**, tomamos **polígonos en  $E$**  verificando lo siguiente:
  - ▶ la reunión de estos polígonos es igual a  $E$ .
  - ▶ los polígonos sólo se intersectan en los bordes.



## Embaldosado.



- ▶ En lugar del **piso**, un gran **cuadrado en el plano**.
- ▶ En lugar de las **baldosas del piso**, tomamos **polígonos en  $E$**  verificando lo siguiente:
  - ▶ la reunión de estos polígonos es igual a  $E$ .
  - ▶ los polígonos sólo se intersectan en los bordes.
  - ▶ los polígonos pueden tener una marca o color.

## Embaldosados del plano.

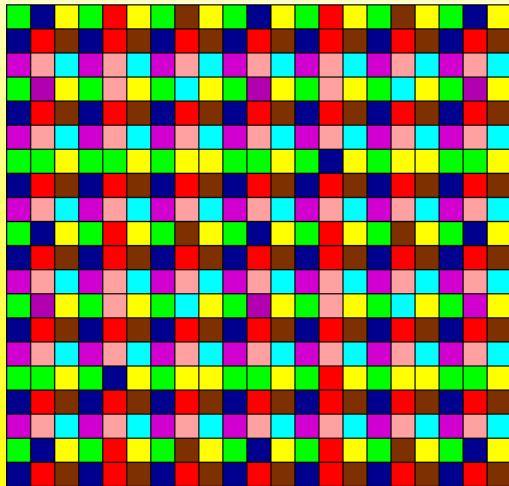
Clasificación de los embaldosados del plano.

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

# Embaldosado.



## Embaldosados del plano.

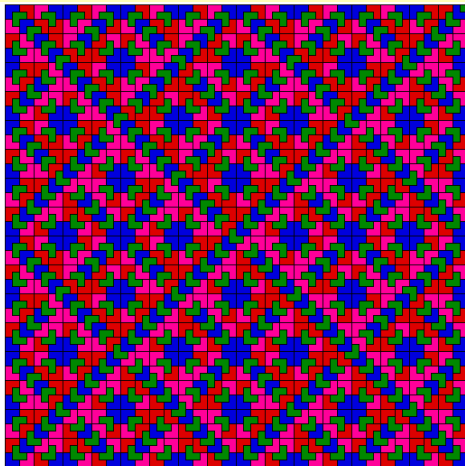
Clasificación de los embaldosados del plano.

El problema de embaldosar el plano.

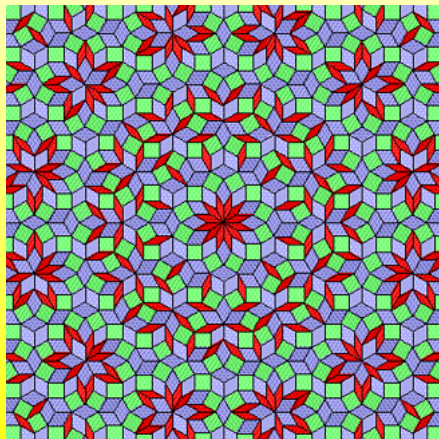
Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

# Embaldosado de la silla



## Embaldosado de Penrose.



## Embaldosados del plano.

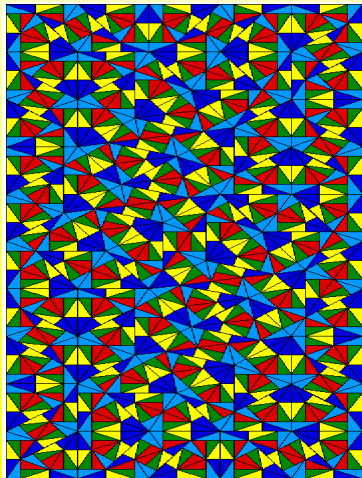
Clasificación de los embaldosados del plano.

El problema de embaldosar el plano.

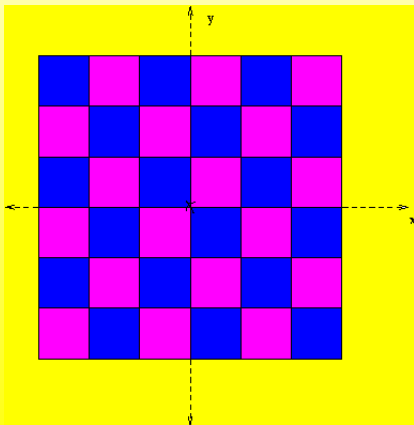
Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

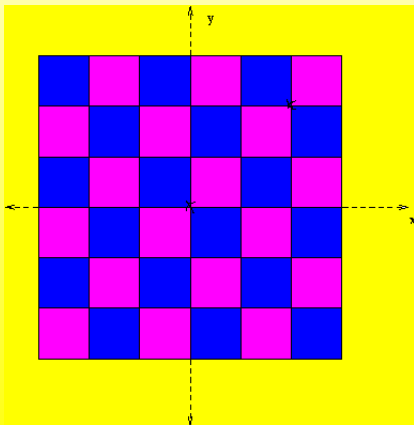
# Embaldosado de Pinwheel.



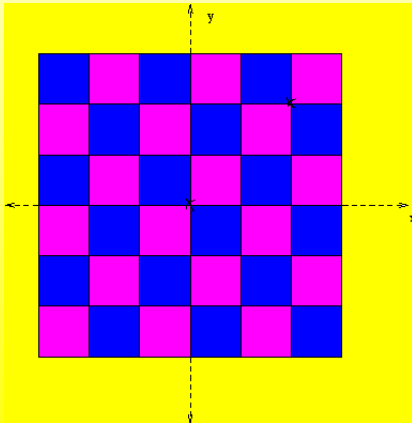
# Embaldosados del plano periódicos.



## Embaldosados del plano periódicos.



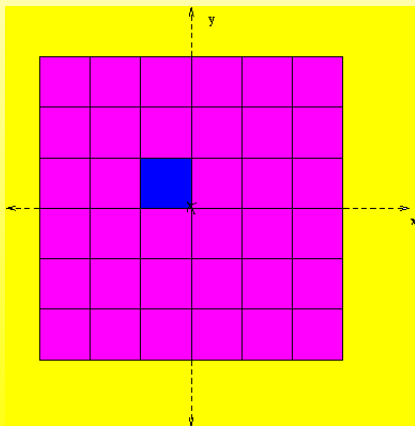
## Embaldosados del plano periódicos.



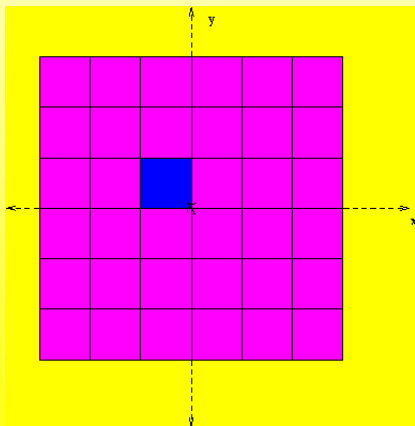
- ▶ Si se traslada este embaldosado del plano desde uno de los puntos marcados al otro, el embaldosado del plano resultante es el mismo.



## Embaldosados del plano no periódicos.



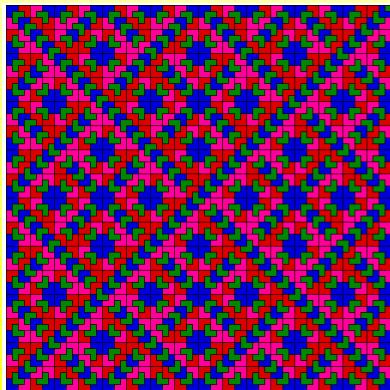
## Embaldosados del plano no periódicos.



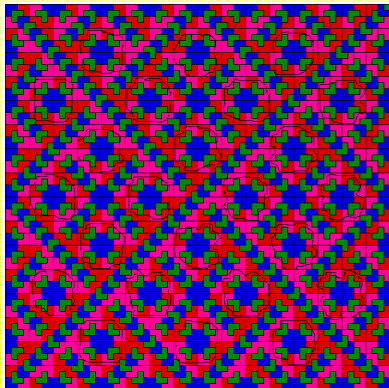
- ▶ Este embaldosado del plano no es periódico.



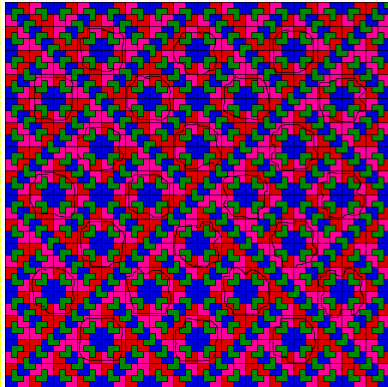
## Embaldosados del plano repetitivos.



## Embaldosados del plano repetitivos.



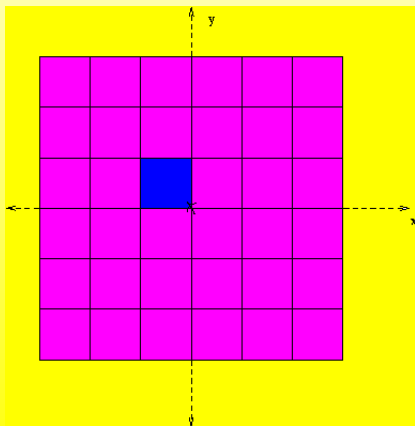
## Embaldosados del plano repetitivos.



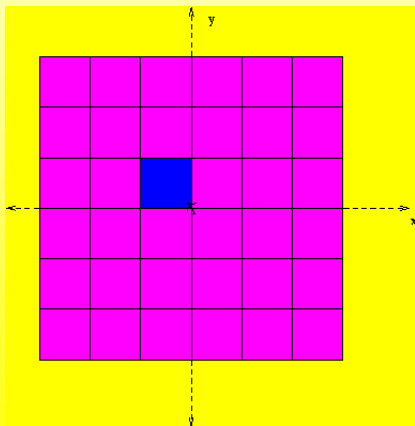
- ▶ Cualquier dibujo de este embaldosado del plano se repite a través de todo el embaldosado, y lo hace de manera que no hayan espacios muy grandes entre una copia y otra del dibujo.



## Embaldosado no repetitivo.

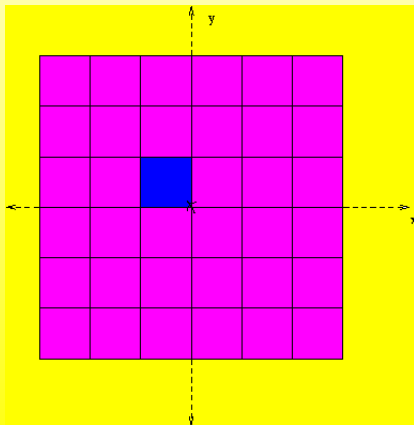


## Embaldosado no repetitivo.



- El cuadrado azul no se repite.

## Embaldosado no repetitivo.



- ▶ El cuadrado azul no se repite.
- ▶ Este emblema no es repetitivo.

- ▶ Todos los embaldosados del plano que son periódicos son repetitivos.

- ▶ Todos los embaldosados del plano que son periódicos son repetitivos.
- ▶ Hay embaldosados del plano que no son periódicos pero que son repetitivos.

Embaldosados del plano.

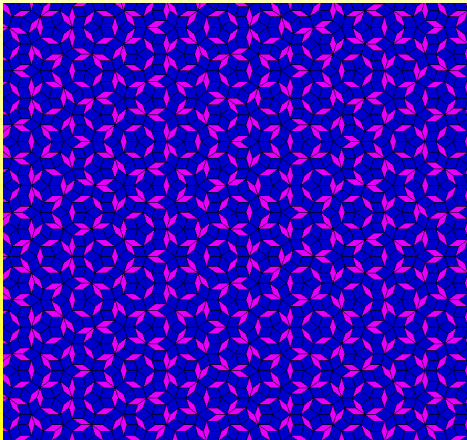
**Clasificación de los embaldosados del plano**

El problema de embaldosar el plano.

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.

## Embaldosado de Penrose.



## Embaldosados con polígonos regulares.

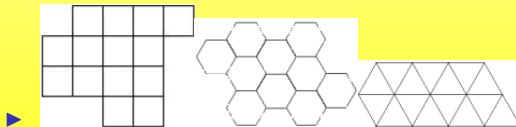
- ▶ ¿Es posible embaldosar el plano utilizando polígonos regulares del mismo tipo que se toquen cara a cara?

## Embaldosados con polígonos regulares.

- ▶ ¿Es posible embaldosar el plano utilizando polígonos regulares del mismo tipo que se toquen cara a cara?
- ▶ Sí, pero sólo utilizando cuadrados, triángulos equiláteros o hexágonos.

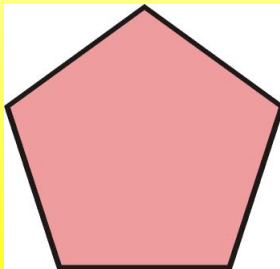
## Embaldosados con polígonos regulares.

- ▶ ¿Es posible embaldosar el plano utilizando polígonos regulares del mismo tipo que se toquen cara a cara?
- ▶ Sí, pero sólo utilizando cuadrados, triángulos equiláteros o hexágonos.



- ▶ El valor de los ángulos internos de los cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos dividen a 360. Esta es la razón de por que se puede embaldosar el plano usando estas figuras.

- ▶ El valor de los ángulos internos de los cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos dividen a 360. Esta es la razón de por que se puede embaldosar el plano usando estas figuras.
- ▶ Un pentágono tiene un ángulo interior de 108 grados, por lo tanto, no embaldosa el plano.



- ▶ ¿Es posible saber si se puede o no embaldosar el plano con  **baldosas de un cierto tipo** siguiendo un  **conjunto de reglas** dado?

- ▶ ¿Es posible saber si se puede o no embaldosar el plano con **balosas de un cierto tipo** siguiendo un **conjunto de reglas** dado?
- ▶ Por ejemplo, ya sabemos que es posible embaldosar el plano con cuadrados de manera que estos se toquen cara a cara.

- ▶ ¿Es posible saber si se puede o no embaldosar el plano con **baldosas de un cierto tipo** siguiendo un **conjunto de reglas** dado?
- ▶ Por ejemplo, ya sabemos que es posible embaldosar el plano con cuadrados de manera que estos se toquen cara a cara.
- ▶ ¿Qué sucede en un contexto más general?

- ▶ ¿Es posible saber si se puede o no embaldosar el plano con  **baldosas de un cierto tipo** siguiendo un **conjunto de reglas** dado?
- ▶ Por ejemplo, ya sabemos que es posible embaldosar el plano con cuadrados de manera que estos se toquen cara a cara.
- ▶ ¿Qué sucede en un contexto más general?
- ▶ Para tratar de responder esta pregunta, estudiaremos primero que sucede con los **embaldosados de la recta**.

Embaldosados del plano.

Clasificación de los embaldosados del plano

**El problema de embaldosar el plano.**

Embaldosados de sustitución.

Problemas relacionados con embaldosados.



...La recta se puede embaldosar



**El problema de embaldosar el plano.**



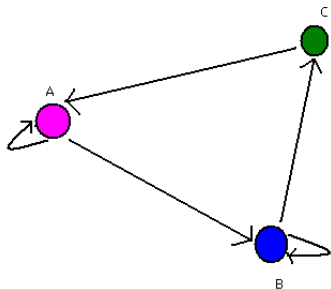
- ▶ ¿Es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C respetando la siguiente regla:?

- ▶ ¿Es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C respetando la siguiente regla:?
- ▶ Después de una baldosa de tipo A puede venir una de tipo A o B.

- ▶ ¿Es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C respetando la siguiente regla:?
- ▶ Después de una baldosa de tipo A puede venir una de tipo A o B.
- ▶ Después de una baldosa de tipo B puede venir una de tipo C o B.

- ▶ ¿Es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C respetando la siguiente regla:?
- ▶ Después de una baldosa de tipo A puede venir una de tipo A o B.
- ▶ Después de una baldosa de tipo B puede venir una de tipo C o B.
- ▶ Después de una baldosa de tipo C sólo puede venir una de tipo A.

La regla de como embaldosar la recta se puede expresar mediante el siguiente grafo:

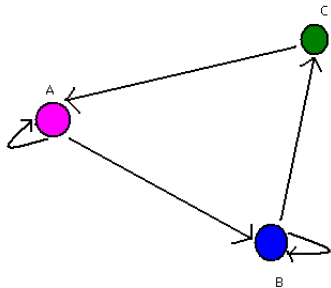


- ▶ La respuesta a la pregunta de si es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C según la regla antes descrita, es afirmativa si es posible recorrer en el grafo todos los nodos A, B y C en un camino infinito hacia adelante y hacia atrás.

- ▶ La respuesta a la pregunta de si es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C según la regla antes descrita, es afirmativa si es posible recorrer en el grafo todos los nodos A, B y C en un camino infinito hacia adelante y hacia atrás.
- ▶ La respuesta es negativa si lo anterior no es posible.

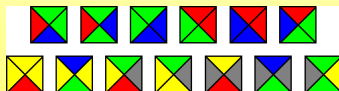
- ▶ La respuesta a la pregunta de si es posible embaldosar la recta utilizando baldosas de tipo A,B y C según la regla antes descrita, es afirmativa si es posible recorrer en el grafo todos los nodos A, B y C en un camino infinito hacia adelante y hacia atrás.
- ▶ La respuesta es negativa si lo anterior no es posible.
- ▶ ¿ Cómo saber si existe tal camino infinto?

Si la matriz  $M$  es irreducible.



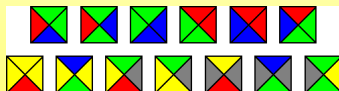
$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M$$

## Baldosas de Wang



- ▶ Las baldosas de la figura se conocen como **baldosas de Wang** (Wang tiles).

## Baldosas de Wang



- ▶ Las baldosas de la figura se conocen como **baldosas de Wang** (Wang tiles).
- ▶ El problema es tratar de embaldosar el plano usando baldosas de Wang, de manera que dos baldosas se pueden tocar solamente en los lados que tengan el mismo color.

## El problema de embaldosar el plano.

- ▶ ¿ Existirá un *algoritmo* que permita decidir si será o no posible embaldosar el plano utilizando reglas y baldosas de una cierta colección?

## El problema de embaldosar el plano.

- ▶ ¿ Existirá un *algoritmo* que permita decidir si será o no posible embaldosar el plano utilizando reglas y baldosas de una cierta colección?
- ▶ En los 60, Wang pensaba que si existía tal algoritmo. Probó que la existencia de un tal algoritmo implicaba que, cada vez que fuera posible embaldosar el plano con una cierta colección de reglas y baldosas, siempre sería posible embaldosarlo de manera periódica.

## El problema de embaldosar el plano.

- ▶ ¿ Existirá un *algoritmo* que permita decidir si será o no posible embaldosar el plano utilizando reglas y baldosas de una cierta colección?
- ▶ En los 60, Wang pensaba que si existía tal algoritmo. Probó que la existencia de un tal algoritmo implicaba que, cada vez que fuera posible embaldosar el plano con una cierta colección de reglas y baldosas, siempre sería posible embaldosarlo de manera periódica.
- ▶ A finales de los 60, Berger encontró una colección de cerca de 20 mil baldosas de Wang, que permitían embaldosar el plano siempre de manera no periódica. Esto demostró que no existe un algoritmo que permita decidir si se puede o no embaldosar el plano.

## Algunas formas de construir embaldosados.

- ▶ Los embaldosados que construyó Berger y otros que se han hecho utilizando baldosas de Wang resultan, en general, ser no periódicos y repetitivos. (otros ejemplos son el de Penrose, el de la silla, etc.)

## Algunas formas de construir embaldosados.

- ▶ Los embaldosados que construyó Berger y otros que se han hecho utilizando baldosas de Wang resultan, en general, ser no periódicos y repetitivos. (otros ejemplos son el de Penrose, el de la silla, etc.)
- ▶ No siempre es fácil construir embaldosados repetitivos y no periódicos.

## Algunas formas de construir embaldosados.

- ▶ Los embaldosados que construyó Berger y otros que se han hecho utilizando baldosas de Wang resultan, en general, ser no periódicos y repetitivos. (otros ejemplos son el de Penrose, el de la silla, etc.)
- ▶ No siempre es fácil construir embaldosados repetitivos y no periódicos.
- ▶ Hay algunos embaldosados no periódicos y repetitivos que se pueden obtener por un método llamado de **sustitución**.

Embaldosados del plano.

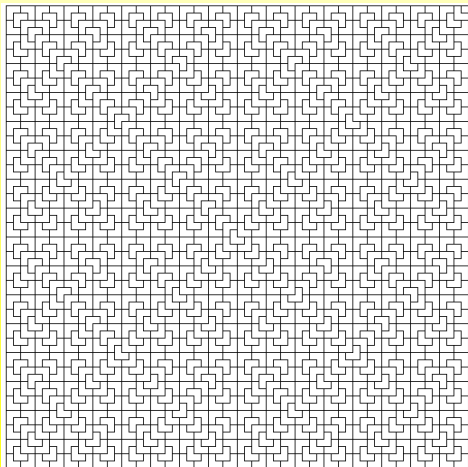
Clasificación de los embaldosados del plano.

El problema de embaldosar el plano.

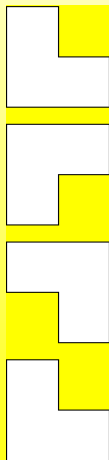
**Embaldosados de sustitución.**

Problemas relacionados con embaldosados.

## Embaldosado de la silla



## Tipos de baldosas del embaldosado de la silla



Embaldosados del plano.

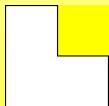
Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

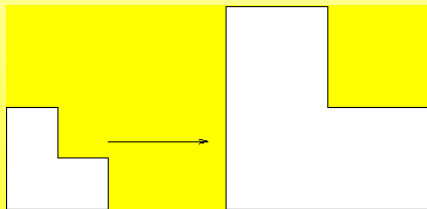
**Embaldosados de sustitución.**

Problemas relacionados con embaldosados.

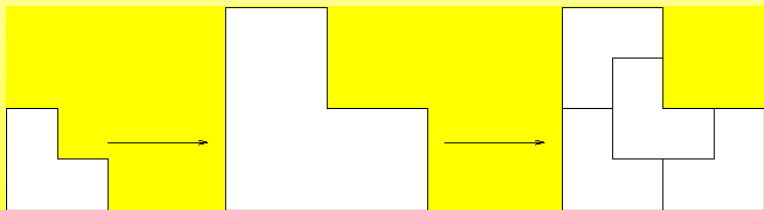
## Paso 1.



## Paso 1.



## Paso 1.



Embaldosados del plano.

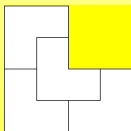
Clasificación de los embaldosados del plano

El problema de embaldosar el plano.

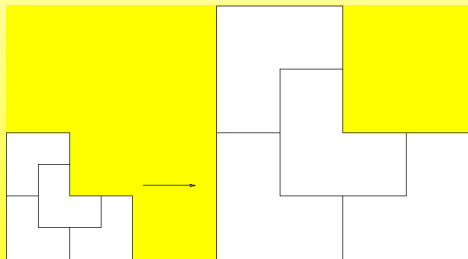
**Embaldosados de sustitución.**

Problemas relacionados con embaldosados.

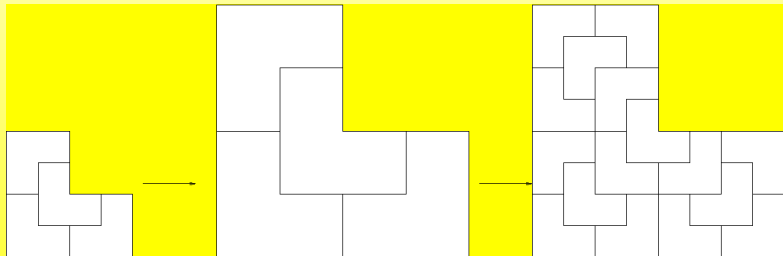
## Paso 2.



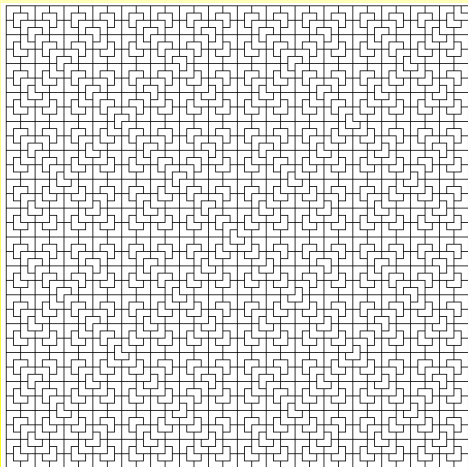
## Paso 2.



## Paso 2.



## Paso $n$ , con $n$ muy grande.



## ¿Para que sirven los embaldosados?

- ▶ A principios de los 80, un grupo de físicos descubrió los **cuasicristales**. Un tipo de material cuya estructura atómica es como un embaldosado no periódico y repetitivo.

## ¿Para que sirven los embaldosados?

- ▶ A principios de los 80, un grupo de físicos descubrió los **cuasicristales**. Un tipo de material cuya estructura atómica es como un embaldosado no periódico y repetitivo.
- ▶ Desde finales de los 80 y hasta hoy, se estudian muchos problemas relacionados con embaldosados. Por ejemplo, en el área de los **sistemas dinámicos**, se ha desarrollado toda una línea que tiene que ver con embaldosados del plano.

## ¿Para que sirven los embaledosados?

- ▶ A principios de los 80, un grupo de físicos descubrió los **cuasicristales**. Un tipo de material cuya estructura atómica es como un embaledosado no periódico y repetitivo.
- ▶ Desde finales de los 80 y hasta hoy, se estudian muchos problemas relacionados con embaledosados. Por ejemplo, en el área de los **sistemas dinámicos**, se ha desarrollado toda una línea que tiene que ver con embaledosados del plano.
- ▶ En otras áreas, como en biología e informática, se utilizan embaledosados de Wang. Por ejemplo, los embaledosados de Wang se usan en informática para graficar texturas.

Embaldosados del plano.  
Clasificación de los embaldosados del plano  
El problema de embaldosar el plano.  
Embaldosados de sustitución.  
**Problemas relacionados con embaldosados.**

**FIN**