HENRI COMMAN*

**Capacités sur les ensembles partiellement ordonnés****

RESUME. – Nous définissons une capacité sur un ensemble partiellement ordonné, et généralisons à ce contexte les résultats essentiels de la théorie des capacités ensemblistes (au sens de O'Brien).

**Capacità su insiemi parzialmente ordinati**

RIASSUNTO. – Si definisce il concetto di capacità su un insieme parzialmente ordinato e si estendono a questo tipo di capacità i risultati essenziali della teoria delle capacità insiemistiche (nel senso di O'Brien).

# Introduction

Récemment, plusieurs auteurs ([9], [10], [11], [12]) ont développé une théorie topologique des capacités, contenant certains théorèmes classiques de compacité (vague, étroite) pour les mesures de Radon, ainsi que d'importants résultats en théorie des grandes déviations. Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$) l'ensemble des parties compactes (resp. ouvertes, fermées) d'un espace topologique séparé $X$. Dans le sens de [10], une capacité sur $X$ est une application $\gamma$ de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de $X$ à valeurs dans $[0,\infty]$ telle que:

(i) $\gamma(\emptyset) = 0$,

(ii) $\gamma(Y) = \sup_{K\subset Y, K\in\mathcal{K}} \gamma(K)$ pour tout $Y \subset X$,

(iii) $\gamma(K) = \inf_{G\supset K, G\in\mathcal{G}} \gamma(G)$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

La topologie vague (resp. étroite) sur l'ensemble des capacités est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\gamma \mapsto \gamma(Y)$ sont semi-continues supérieurement pour tout $Y \in \mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{F}$) et semi-continues inférieurement pour tout $Y \in \mathcal{G}$.

Nous présentons ici une généralisation des résultats essentiels de cette théorie qui repose sur l'observation suivante: les définitions de base, ainsi que les démonstrations ne requièrent de $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ qu'un nombre restreint de proprietés très simples qui n'utilisent pas la distributivité de $\mathcal{P}(X)$. Si l'on remplace $\mathcal{P}(X)$

*Faculté de Mathématiques, Université Catholique du Chili, Casilla 306, Santiago 22, Chile, E-mail: hcomman@mat.puc.cl

**Financé par la Chaire Présidentielle en Analyse Qualitative des Systèmes Dynamiques Quantiques, et la Direction de la Recherche de l'Université Catholique du Chili.

par un treillis (ou même parfois un ensemble partiellement ordonné) $L$ pourvu d'un élément minimal et d'un élément maximal, $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ par trois parties $A, B, C$ de $L$ vérifiant ces propriétés, alors un grand nombre de résultats restent vrais.

Notre motivation n'est pas seulement d'ordre formel. En effet, considèrons le treillis $L$ des projections d'une algèbre de Von Neumann, et observons que l'algèbre est commutative si et seulement si tout triplet dans $L$ est distributif ([1], Theorem 6.11). D'autre part, quand $X$ est localement compact séparé, les éléments de $\mathcal{P}(X)$ identifiés avec les fonctions caractéristiques, sont des projections de l'algèbre de Von Neumann enveloppante de la C*-algèbre des fonctions complexes continues sur $X$ s'annulant à l'infini ([13]). Donc, d'un point de vue algébrique, une large part de cette théorie des capacités (pour $X$ localement compact séparé) est bonne candidate à une éventuelle généralisation au contexte des C*-algèbres non commutatives.

Cet article est à considérer comme une première étape formelle vers cet objectif plus ambitieux, dont nous donnons un avant-goût dans la Section 3.

Dans la Section 1, nous définissons une capacité sur un ensemble partiellement ordonné $L$, ainsi que les topologies vague et étroite sur l'ensemble des capacités. Lorsque $L$ est un treillis, les notions de sous-additivité, forte sous-additivité, additivité et maxitivité sont introduites. Si $(A, B)$ vérifie une propriété analogue à la locale compacité, alors la topologie vague est séparée. Si de plus, $A$ et $B$ sont stables par sup et inf fini, et vérifient une propriété analogue à la séparation, alors les ensembles de capacités sous-additives, fortement sous-additives, additives et maxitives, sont vaguement fermés dans l'ensemble des capacités (Proposition 1).

La Section 2 traite de la compacité. En particulier, l'ensemble des capacités à valeurs dans un compact contenant 0 est vaguement compact (Théorème 1). Il est remarquable que ce théorème est vrai si $L$ est seulement partiellement ordonné avec un élément minimal appartenant à $A \cap B$. Des critères de relative compacité vague dans plusieurs classes de capacités sont donnés. Les notions de contrôle, tension et confinement (définies dans [11] et [12]) sont ici généralisées, ainsi que les critères de net-compacité étroite dans l'ensemble des capacités (resp. sous-additives, fortement sous-additives, additives et maxitives). Un principe de grandes déviations pour un net de capacités est également défini, et les théorèmes de compacité appliqués à ce contexte permettent d'étendre un résultat classique (Proposition 3).

La Section 3 est constituée d'exemples. Le premier est bien sûr celui des capacités sur un espace séparé $X$ au sens de [10]. Lorsque $X$ est localement compact, nous rappelons comment on retrouve les résultats de compacité vague et étroite pour les mesures de Radon, ainsi que certains résultats de grandes déviations. Dans le second exemple, les capacités ont pour arguments des fonctions sur un espace localement compact métrisable; plus précisément, $L = \mathbf{R}_+^X \cup \{\infty\}$, $A = \{l \in \mathbf{R}_+^X; l$ semi-continue supérieurement à support compact$\}$, $B = \{l \in \mathbf{R}_+^X; l$ semi-continue inférieurement$\} \cup \{\infty\}$, et $C = \{l \in \mathbf{R}_+^X; l$ semi-continue supérieurement$\} \cup \{\infty\}$. Quand $X$ est compact métrisable, les capacités fonctionnelles positives de Choquet s'annulant sur la fonction nulle en sont des exemples; une application directe d'un théorème de [3] permet de les caractériser. Dans le troisième exemple, les capacités ont pour arguments les projections d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. En particulier, nous montrons comment tout opérateur positif dans $\mathcal{H}$ définit une capacité maxitive.

Mentionnons ici que sauf exceptions (Corollaires 1, 2, et Section 3), les démonstrations données sont des transcriptions directes au cadre des ensembles partiellement ordonnés de celles parues dans les articles sus-cités.

# 1 Espace des capacités

Dans tout le texte, $(L, \leq\ )$ est un ensemble partiellement ordonné avec un élément minimal 0 et un élément maximal 1, et $A, B, C$ trois parties de $L$ telles que: $0 \in A \cap B$, $1 \in B \cap C$ et $A \subset C$.

**Définition 1** Une application $\gamma : L \to [0, \infty]$ est une *capacité* sur $L$ si

(i) $\gamma(0) = 0$,

(ii) $\gamma(l) = \sup_{a \leq l, a \in A} \gamma(a)$ pour tout $l \in L$,

(iii) $\gamma(a) = \inf_{b \geq a, b \in B} \gamma(b)$ pour tout $a \in A$.

Notons $\Gamma$ l'ensemble des capacités sur $L$. Lorsque $L$ est un treillis, une capacité $\gamma \in \Gamma$ est

- *sous-additive* si $\gamma(a_1 \vee a_2) \leq \gamma(a_1) + \gamma(a_2)$ pour tout $a_1, a_2$ dans $A$.
- *fortement sous-additive* si $\gamma(a_1 \vee a_2) \leq \gamma(a_1) + \gamma(a_2) - \gamma(a_1 \wedge a_2)$ pour tout $a_1, a_2$ dans $A$.
- *additive* si $\gamma$ est sous-additive et $\gamma(a_1 \vee a_2) = \gamma(a_1) + \gamma(a_2)$ pour tout $a_1, a_2$ dans $A$ avec $a_1 \wedge a_2 = 0$.
- *maxitive* si $\gamma(a_1 \vee a_2) \leq \gamma(a_1) \vee \gamma(a_2)$ pour tout $a_1, a_2$ dans $A$.

Notons $\Gamma_{sa}$ (resp. $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m$) l'ensemble des capacités sous-additives (resp. fortement sous-additives, additives, maxitives). Pour tout $\Gamma' \subset \Gamma$ et $\Delta \subset [0, \infty]$, définissons les ensembles suivants:

- $\Gamma'_\Delta = \{\gamma \in \Gamma'; \forall l \in L, \gamma(l) \in \Delta\}$.
- $\Gamma'_1 = \{\gamma \in \Gamma'; \gamma(1) = 1\}$.
- $\Gamma'_< = \{\gamma \in \Gamma'; \forall a \in A, \gamma(a) < \infty\}$.

**Définition 2** La topologie *vague* (resp. *étroite*) sur $\Gamma$ est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\gamma \mapsto \gamma(e)$ sont semi-continues supérieurement pour tout $e \in A$ (resp. $C$) et semi-continues inférieurement pour tout $e \in B$.

**Remarque 1** Une sous base pour la topologie vague (resp. étroite) est constituée de tous les ensembles de la forme $\{\gamma \in \Gamma; \gamma(b) > x\}$ ou de la forme $\{\gamma \in \Gamma; \gamma(e) < x\}$ avec $b \in B$, $e \in A$ (resp. $C$) et $x > 0$.

Un net $(\gamma_\alpha)$ dans $\Gamma$ converge vaguement (resp. étroitement) vers $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si $\limsup \gamma_\alpha(e) \leq \gamma(e)$ pour tout $e \in A$ (resp. $C$), et $\liminf \gamma_\alpha(b) \geq \gamma(b)$ pour tout $b \in B$.

**Proposition 1** *Supposons que $(A, B)$ verifie la propriété suivante : (I) (Interpolation) pour tout $a \in A$, $b \in B$ avec $a \leq b$, il existe $a' \in A$ et $b' \in B$ tels que $a \leq b' \leq a' \leq b$. Alors,*

*(a) $\Gamma$ est vaguement séparé.*

*(b) Si de plus $L$ est un treillis avec $(A, B)$ vérifiant les propriétés suivantes:*

*(S) (Stabilité) $A$ et $B$ sont stables par* inf *et* sup *fini.*

*(H) (Hausdorff) Pour tout $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $b \in B$ tels que $a_1 \wedge a_2 = 0$ et $a_1 \vee a_2 \leq b$, il existe $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ tels que $a_1 \leq b_1 \leq b$, $a_2 \leq b_2 \leq b$ et $b_1 \wedge b_2 = 0$.*

*Alors $\Gamma_{sa}, \Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m$ sont vaguement fermés dans $\Gamma$, et $\Gamma_{a,1}$ est étroitement fermé dans $\Gamma$.*

*Preuve.* (a) Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ dans $\Gamma$, il existe $a \in A$ tel que $\gamma_1(a) \neq \gamma_2(a)$, par exemple $\gamma_1(a) < \gamma_2(a)$. Par définition, il existe $b \in B$ tel que $b \geq a$ et $\gamma_1(b) < \gamma_1(a) + \varepsilon$ où $\varepsilon < \frac{\gamma_2(a) - \gamma_1(a)}{4}$. Il existe $a'$ dans $A$ et $b'$ dans $B$ tels que $a \leq b' \leq a' \leq b$. Alors $\gamma_1$ appartient à l'ouvert pour la topologie vague $V_1 = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(a') < \gamma_1(a) + \varepsilon\}$ et $\gamma_2$ à l'ouvert $V_2 = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b') > \gamma_1(a) + \varepsilon\}$ avec $V_1$ et $V_2$ disjoints.

(b) Montrons que $\Gamma_{sa}$ est vaguement fermé dans $\Gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_{sa}$. Il existe $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ tels que $\gamma(a_1) < x_1$, $\gamma(a_2) < x_2$ et $\gamma(a_1 \vee a_2) > x_1 + x_2$. Par définition, il existe $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ tels que $b_1 \geq a_1$, $b_2 \geq a_2$, $\gamma(b_1) < x_1$ et $\gamma(b_2) < x_2$. Il existe $a'_1, a'_2$ dans $A$, $b'_1, b'_2$ dans $B$ tels que $a_1 \leq b'_1 \leq a'_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b'_2 \leq a'_2 \leq b_2$. Alors $\gamma$ appartient à l'ouvert pour la topologie vague $V = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(a'_2) < x_2,\ \delta(a'_1) < x_1,\ \delta(b'_1 \vee b'_2) > x_1 + x_2\}$ qui ne rencontre pas $\Gamma_{sa}$.

Montrons que $\Gamma_{ssa}$ est vaguement fermé dans $\Gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_{ssa}$. Il existe $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y > 0$, $z > 0$ tels que $\gamma(a_1 \vee a_2) > y$, $\gamma(a_1 \wedge a_2) > z$, $\gamma(a_1) < x_1$, $\gamma(a_2) < x_2$ et $y + z > x_1 + x_2$. Par définition, il existe $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ tels que $b_1 \geq a_1$, $b_2 \geq a_2$, $\gamma(b_1) < x_1$ et $\gamma(b_2) < x_2$. Il existe $a'_1, a'_2$ dans $A$, $b'_1, b'_2$ dans $B$, tels que $a_1 \leq b'_1 \leq a'_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b'_2 \leq a'_2 \leq b_2$. Alors, $\gamma$ appartient à l'ouvert pour la topologie vague $V = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b'_1 \vee b'_2) > y,\ \delta(b'_1 \wedge b'_2) > z,\ \delta(a'_1) < x_1,\ \delta(a'_2) < x_2\}$ qui ne rencontre pas $\Gamma_{ssa}$.

Montrons que $\Gamma_a$ est vaguement fermé dans $\Gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma_{sa} \backslash \Gamma_a$. Il existe $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ tels que $a_1 \wedge a_2 = 0$, $\gamma(a_1 \vee a_2) < x_1 + x_2$, $\gamma(a_1) > x_1$, $\gamma(a_2) > x_2$. D'après (S), il existe $b \in B$ tel que $b \geq a_1 \vee a_2$ et $\gamma(b) < x_1 + x_2$. D'après (H), il existe $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ tels que $a_1 \leq b_1 \leq b$, $a_2 \leq b_2 \leq b$ et $b_1 \wedge b_2 = 0$. Il existe $a'_1, a'_2$ dans $A$, $b'_1, b'_2$ dans $B$ tels que

$a_1 \le b'_1 \le a'_1 \le b_1$ et $a_2 \le b'_2 \le a'_2 \le b_2$. Donc $\gamma$ appartient à l'ouvert pour la topologie vague $V = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b'_1) > x_1,\ \delta(b'_2) > x_2,\ \delta(a'_1 \vee a'_2) < x_1 + x_2\}$ qui ne rencontre pas $\Gamma_a$.

Montrons que $\Gamma_m$ est vaguement fermé dans $\Gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_m$. Il existe $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ tels que $\gamma(a_1 \vee a_2) > x_1 \vee x_2$, $\gamma(a_1) < x_1$, $\gamma(a_2) < x_2$. Soit $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ tels que $b_1 \ge a_1$, $b_2 \ge a_2$ ,$\gamma(b_1) < x_1$ et $\gamma(b_2) < x_2$. Il existe $a'_1, a'_2$ dans $A$, $b'_1, b'_2$ dans $B$ tels que $a_1 \le b'_1 \le a'_1 \le b_1$ et $a_2 \le b'_2 \le a'_2 \le b_2$. Alors $\gamma$ appartient à l'ouvert pour la topologie vague $V = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b'_1 \vee b'_2) > x_1 \vee x_2,\ \delta(a'_1) < x_1,\ \delta(a'_2) < x_2\}$ qui ne rencontre pas $\Gamma_m$.

Montrons que $\Gamma_{a,1}$ est étroitement fermé dans $\Gamma$. Si $\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma_{a,1}$, $\gamma(1) < 1$ ou $\gamma(1) > 1$. Puisque $1 \in B \cap C$, dans les deux cas on obtient un ouvert qui ne rencontre pas $\Gamma_{a,1}$. $\square$

# 2 Compacité

## 2.1 Compacité vague

**Théorème 1** *Si $\Delta$ est un sous-ensemble compact de $[0, \infty]$ contenant 0, alors $\Gamma_\Delta$ est vaguement compact.*

*Si $L$ est un treillis avec $(A, B)$ vérifiant les propriétés (I), (S), (H) de la Proposition 1, alors l' assertion précédente est encore vraie en remplaçant $\Gamma$ par $\Gamma_{sa}$ (resp. $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m$).*

*Preuve.* Soit

$$\mathcal{V} = \bigcup_{b_i \in B,\ x_i > 0,\ i \in I} \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma(b_i) > x_i\} \cup \bigcup_{a_j \in A,\ y_j > 0,\ j \in J} \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma(a_j) < y_j\}$$

un recouvement de $\Gamma_\Delta$ par des ouverts de la sous-base de la Remarque 1. D'après le théorème d'Alexander il suffit d'extraire de $\mathcal{V}$ un sous recouvrement fini. Puisque $0 \in B$ on peut supposer $x_i = 0$ pour un certain $i$ en ajoutant $\emptyset = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma(0) > 0\}$ à $\mathcal{V}$. En remplaçant $x_i$ par $\sup\{x \in \Delta;\ x \le x_i\}$, on peut supposer $x_i \in \Delta$, pour tout $i \in I$. Pour tout $a \in A$ posons $\gamma_0(a) = \inf_{b_i \ge a, b_i \in B}\ x_i$ et étendons $\gamma_0$ à $L$ par $\gamma_0(l) = \sup_{a \le l, a \in A}\ \gamma_0(a)$, pour tout $l \in L$. Vérifions que $\gamma_0 \in \Gamma_\Delta$: $\gamma_0$ prend ses valeurs dans $\Delta$; $\gamma_0(0) = 0$ est évident car $0 \in A \cap B$ et $x_i = 0$ pour un certain $i$; puisque

$$\forall i \in I,\quad \gamma_0(b_i) = \sup_{a \le b_i, a \in A} \gamma_0(a) = \sup_{a \le b_i, a \in A} \{\inf_{b_j \ge a, b_j \in B} x_j\} \le x_i,$$

on obtient

$$\gamma_0(a) \le \inf_{b \ge a, b \in B} \gamma_0(b) \le \inf_{b_i \ge a, b_i \in B} \gamma_0(b_i) \le \inf_{b_i \ge a, b_i \in B} x_i = \gamma_0(a)$$

pour tout $a \in A$, et donc $\gamma_0 \in \Gamma_\Delta$. L'un des ouverts de $\mathcal{V}$ contient $\gamma_0$ et puisque $\gamma_0(b_i) \le x_i$ pour tout $i \in I$, $\gamma_0(a_{j_0}) < y_{j_0}$ pour un certain $j_0 \in J$.

Par définition de $\gamma_0(a_{j_0})$, il existe $i_0 \in I$ tel que $b_{i_0} \geq a_{j_0}$ et $x_{i_0} < y_{j_0}$. Soit $\gamma \in \Gamma_\Delta$. Si $\gamma \notin \{\delta \in \Gamma;\ \delta(a_{j_0}) < y_{j_0}\}$ alors $\gamma(b_{i_0}) \geq \gamma(a_{j_0}) \geq y_{j_0} > x_{i_0}$ et $\gamma \in \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b_{i_0}) > x_{i_0}\}$, et $\Gamma_\Delta$ est compact.

Puisque $\Gamma_{sa,\Delta} = \Gamma_{sa} \cap \Gamma_\Delta$ (resp. $\Gamma_{ssa,\Delta} = \Gamma_{ssa} \cap \Gamma_\Delta$, $\Gamma_{a,\Delta} = \Gamma_a \cap \Gamma_\Delta$, $\Gamma_{m,\Delta} = \Gamma_m \cap \Gamma_\Delta$), la dernière assertion résulte de la Proposition 1. $\square$

**Corollaire 1** *Supposons que $(A, B)$ vérifie la propriété (I). Un ensemble $\Pi \subset \Gamma_1$ est vaguement relativement compact dans $\Gamma_1$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{a_1, ..., a_n\} \subset A$ tels que: $\gamma \in \Pi$ implique $\gamma(a_k) > 1 - \varepsilon$ pour un certain $k$ $(1 \leq k \leq n)$.*

*Si $L$ est un treillis avec $(A, B)$ vérifiant les propriétés (S), (H), alors l' assertion précédente est encore vraie en remplaçant $\Gamma$ par $\Gamma_{sa}$ (resp. $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m$), avec de plus $n = 1$.*

*Preuve.* Supposons que la condition soit vérifiée. D'après le Théorème 1, il suffit de montrer que la clôture vague $\overline{\Pi}$ est dans $\Gamma_1$. Soit $\gamma \in \overline{\Pi}$ et $(\gamma_\alpha)$ un net dans $\Pi$ convergeant vaguement vers $\gamma$. Si $\gamma(1) < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(a) < 1 - \varepsilon$ pour tout $a \in A$, et donc pour toute famille finie $\{a_1, ..., a_n\} \subset A$ et pour $\alpha$ assez grand, on a $\gamma_\alpha(a_k) < 1 - \varepsilon$ pour tout $k$ $(1 \leq k \leq n)$, ce qui est impossible. Si $\gamma(1) > 1$, alors $\gamma$ est dans l'ouvert $V = \{\delta \in \Gamma; \delta(1) > 1\}$, et $\gamma_\alpha(1) > 1$ pour $\alpha$ assez grand, ce qui est impossible. Donc, $\gamma(1) = 1$.

Réciproquement, soit $\Pi \in \Gamma_1$ relativement compact dans $\Gamma_1$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $\gamma \in \overline{\Pi} \cap \Gamma_1$ il existe $a'_\gamma \in A$, $a_\gamma \in A$, $b_\gamma \in B$, tels que $a'_\gamma \leq b_\gamma \leq a_\gamma \leq 1$ et $\gamma(a'_\gamma) > 1 - \varepsilon$. Quand $\gamma$ parcourt $\overline{\Pi} \cap \Gamma_1$, les ouverts $V_\gamma = \{\delta \in \overline{\Pi} \cap \Gamma_1; \delta(b_\gamma) > 1 - \varepsilon\}$ forment un recouvrement du compact $\overline{\Pi} \cap \Gamma_1$. Il existe alors un sous-recouvrement fini $V_{\gamma_1} \cup ... \cup V_{\gamma_n}$ de $\overline{\Pi} \cap \Gamma_1$, et on obtient la condition voulue avec $\{a_{\gamma_1}, ..., a_{\gamma_n}\}$.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. $\square$

**Corollaire 2** *Supposons que $(A, B)$ vérifie la propriété (I). Un ensemble $\Pi \subset \Gamma_<$ est vaguement relativement compact dans $\Gamma_<$ si et seulement si*

$$\forall a \in A, \qquad \sup_{\gamma \in \Pi}\ \gamma(a) < \infty.$$

*Si $L$ est un treillis avec $(A, B)$ vérifiant les propriétés (S), (H), alors l' assertion précédente est encore vraie en remplaçant $\Gamma$ par $\Gamma_{sa}$ (resp. $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m$).*

*Preuve.* Supposons que la condition soit vérifiée. D'après le Théorème 1, il suffit de montrer que $\overline{\Pi} \subset \Gamma_<$. Soit $\gamma \in \overline{\Pi}$ et $(\gamma_\alpha)$ un net dans $\Pi$ convergeant vaguement vers $\gamma$. Si $\gamma \notin \Gamma_<$, alors il existe $a \in A$, $a' \in A$, $b' \in B$ tels que $a \leq b' \leq a' \leq 1$ et $\gamma(a) = +\infty$. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\sup_{\gamma \in \Pi}\ \gamma(a') < M$ d'où $\sup_{\gamma \in \Pi}\ \gamma(b') < M$. Mais l'ouvert $V = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b') > M\}$ contient $\gamma$ et donc $\gamma_\alpha$ pour $\alpha$ assez grand, ce qui donne la contradiction.

Réciproquement, soit $\Pi$ relativement compact dans $\Gamma_<$, et $a \in A$. Alors, $\bigcup_{M>0}\ V_M$ avec $V_M = \{\delta \in \Gamma_<; \delta(a) < M\}$, est un recouvrement ouvert du compact $\overline{\Pi} \cap \Gamma_<$, d'où l'existence d'une famille finie $\bigcup_{1 \le i \le n} V_{M_i} = V_{M_{max}}$ avec $M_{max} = \max_{1 \le i \le n} M_i$ recouvrant $\overline{\Pi} \cap \Gamma_<$.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. $\square$

**Théorème 2** $\Gamma$ *est vaguement séquentiellement compact si* $(A, B)$ *vérifie la propriété suivante: il existe* $B' \subset B$ *dénombrable tel que pour tout* $a \in A$ *et* $b \in B$ *avec* $a \le b$*, il existe* $b' \in B'$ *tel que* $a \le b' \le b$*.*

*Si* $L$ *est un treillis avec* $(A, B)$ *vérifiant les propriétés (I), (S), (H), alors l'assertion précédente est encore vraie en remplaçant* $\Gamma$ *par* $\Gamma_{sa}$ *(resp.* $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m$*).*

*Preuve.* Soit $(\gamma_m)$ une suite dans $\Gamma$. Par diagonalisation, il existe une sous-suite $(\gamma_n)$ telle que $\lim \gamma_n(b) = \Lambda(b)$ existe dans $[0, \infty]$ pour tout $b \in B'$. Définissons une application $\gamma$ de $A$ dans $[0, \infty]$ par $\gamma(a) = \inf_{b \ge a, b \in B'} \Lambda(b)$ et étendons $\gamma$ à $L$ par $\gamma(l) = \sup_{a \le l, a \in A} \gamma(a)$ pour tout $l \in L$. Puisque $0 \in A \cap B$, $0 \in B'$ et $\gamma(0) = 0$. Pour tout $b \in B'$,

$$\gamma(b) = \sup_{a \le b, a \in A} \gamma(a) = \sup_{a \le b, a \in A} \{\inf_{b' \ge a, b' \in B'} \Lambda(b')\} \le \Lambda(b),$$

d'où

$$\gamma(a) \le \inf_{b \ge a, b \in B} \gamma(b) \le \inf_{b \ge a, b \in B'} \gamma(b) \le \inf_{b \ge a, b \in B'} \Lambda(b) = \gamma(a),$$

pour tout $a \in A$, et donc $\gamma \in \Gamma$. Vérifions que $\gamma_n$ converge vaguement vers $\gamma$. Pour tout $b \in B$,

$$\gamma(b) = \sup_{b' \le b, b' \in B'} \gamma(b') = \sup_{b' \le b, b' \in B'} \lim \gamma_n(b') \le \liminf \gamma_n(b).$$

Soit maintenant $a \in A$ et $x \ge 0$. Si $\limsup \gamma_n(a) > x$, alors pour tout $b \in B'$ avec $b \ge a$, $\Lambda(b) > x$ et donc $\gamma(a) \ge x$.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. $\square$

## 2.2 Compacité étroite

Soit $X$ un espace topologique. Un ensemble $Y \subset X$ est *net-compact* dans $X$ s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes ([12]):

a) Tout net dans $Y$ a un sous-net qui converge vers un point de $X$.

b) De tout recouvrement ouvert de $X$ on peut extraire un sous-recouvrement fini de $Y$.

Si $X$ est régulier, $Y$ est net-compact dans $X$ si et seulement si $Y$ est relativement compact dans $X$ ([12], [14]). Nous aurons également besoin de la variante suivante du théorème de la sous-base d'Alexander dont la démonstration se trouve dans [12].

**Lemme 1** *Soit $X$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une sous-base pour la topologie. Si $Y \subset X$ n'est pas net-compact dans $X$, alors l'ensemble des recouvrements ouverts $\mathcal{V}$ de $X$ formés d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que $\mathcal{V}$ n'admette pas de sous-recouvrement fini de $Y$, possede un élément maximal $\mathcal{V}_{max}$.*

**Définition 3** Un net $(\gamma_\alpha)$ dans $\Gamma_{[0,\infty[}$ est *contrôlé* si $\forall c \in C$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a \leq c$ tel que si $b \in B$ et $a \leq b$ alors $\gamma_\alpha(c) < \gamma_\alpha(b) + \varepsilon$, pour $\alpha$ assez grand.

Lorsque $L$ est un treillis, un ensemble $\Pi \subset \Gamma_{[0,\infty[}$ est *tendu* s'il existe une suite $(a_m)$ dans $A$ telle que: $a_m \wedge c \in A$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $c \in C$, et $\gamma(a \wedge a_m)$ converge vers $\gamma(a)$ uniformément en $\gamma \in \Pi$ et en $a \in A$. La suite $(a_m)$ est dite *suite de tension* pour $\Pi$.

**Théorème 3** *Soit $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \wp}$ un net dans $\Gamma_{[0,\infty[}$ et $\gamma \in \Gamma_{[0,\infty[}$. Considérons les assertions suivantes:*

*(i) $(\gamma_\alpha)$ converge vaguement vers $\gamma$.*

*(ii) $(\gamma_\alpha)$ converge étroitement vers $\gamma$.*

*(iii) $(\gamma_\alpha)$ est controlé.*

*(iv) $L$ est un treillis et il existe $\alpha_0 \in \wp$ tel que $\{\gamma_\alpha; \alpha \geq \alpha_0\}$ est tendu.*

*Alors,*

*(ii) $\Rightarrow$ (i) et (iii),*

*(i) et (iv) $\Rightarrow$ (ii),*

*Si $(A, B)$ vérifie la propriété (I), alors (i) et (iii) $\Rightarrow$ (ii).*

*Si $L$ est un treillis avec $(A, B)$ vérifiant les propriétés (I), (S), (H), alors les assertions précédentes sont encore vraies en remplaçant $\Gamma$ par $\Gamma_{sa}$ (resp. $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m, \Gamma_{a,1}$).*

*Preuve.* Si (ii) est satisfait, alors (i) aussi puisque $A \subset C$. Soit $c \in C$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \leq c$ tel que $\gamma(c) < \gamma(a) + \varepsilon$, et pour tout $b \in B$ avec $b \geq a$, $\gamma$ appartient à l'ouvert pour la topologie étroite $V = \{\delta \in \Gamma;\ \delta(c) < \gamma(c) + \varepsilon,\ \delta(b) > \gamma(b) - \varepsilon\}$. Ainsi $V$ contient $\gamma_\alpha$ pour $\alpha$ assez grand, et pour tout $\delta \in V$, $\delta(c) < \gamma(c) + \varepsilon < \gamma(a) + 2\varepsilon \leq \gamma(b) + 2\varepsilon \leq \delta(b) + 3\varepsilon$, et $(\gamma_\alpha)$ est controlé.

Supposons (i) et (iv) satisfaits avec $(a_m)$ comme suite de tension. Soit $c \in C$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_0 \in \wp$ tel que pour tout $m \in \mathbf{N}$ assez grand $\gamma_\alpha(c) < \gamma_\alpha(c \wedge a_m) + \varepsilon < \gamma(c \wedge a_m) + 2\varepsilon < \gamma(c) + 2\varepsilon$ pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, ce qui donne (ii) (on utilise ici le fait que $\gamma_\alpha(c) - \gamma_\alpha(c \wedge a_m) \leq \sup_{a \in A}\{\gamma_\alpha(a) - \gamma_\alpha(a \wedge a_m)\}$).

Supposons que (i) et (iii) soient satisfaits, et que $(A, B)$ vérifie la propriété (I). Soit $c \in C$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$, $a \leq c$ tel que si $b \in B$ et $b \geq a$, alors

$$\gamma_\alpha(b) > \gamma_\alpha(c) - \varepsilon \tag{1}$$

pour $\alpha$ assez grand. Pour tout $b \in B$, $b \geq a$, il existe $a' \in A$, $b' \in B$ tels que $a \leq b' \leq a' \leq b$, et $\gamma_\alpha(a') \geq \gamma_\alpha(b') > \gamma_\alpha(c) - \varepsilon$ pour $\alpha$ assez grand (en appliquant (1) avec $b'$). Choisissons $b \in B$, tel que $b \geq a$ et $\gamma(b) < \gamma(a) + \varepsilon$, alors $\gamma_\alpha(c) < \gamma_\alpha(a') + \varepsilon < \gamma(a') + 2\varepsilon < \gamma(a) + 3\varepsilon \leq \gamma(c) + 3\varepsilon$ pour $\alpha$ assez grand, et (ii) est vraie.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. $\square$

**Corollaire 3** *Un ensemble* $\Pi \subset \Gamma_{[0,\infty[}$ *est étroitement net-compact dans* $\Gamma_{[0,\infty[}$ *si* $\Pi$ *est borné et tendu.*

*Si* $L$ *est un treillis avec* $(A, B)$ *vérifiant les propriétés (I), (S), (H), alors les assertions précédentes sont encore vraies en remplaçant* $\Gamma$ *par* $\Gamma_{sa}$ *(resp.* $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m, \Gamma_{a,1}$*).*

*Preuve.* Soit $\Pi \subset \Gamma_{[0,s]}$ $(s < \infty)$ tendu, et $(\gamma_\alpha)$ un net universel dans $\Pi$. D'après le Théorème 1, $(\gamma_\alpha)$ converge vaguement vers $\gamma \in \Gamma_{[0,s]}$. D'après le Théorème 3, $(\gamma_\alpha)$ converge étroitement vers $\gamma$.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. $\square$

**Définition 4** Soit $\Pi \subset \Gamma$. Pour tout $c \in C$, notons $P(c)$ la propriété suivante: pour tout ensemble $\{b_i; i \in I\} \subset B$ tel que si $a \in A$ avec $a \leq c$, alors $a \leq b_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$, pour tout $r < s$ dans $]0, \infty[$, il existe une partie finie $\{b_{i_k}\}_{1 \leq k \leq n} \subset \{b_i; i \in I\}$ telle que: $\gamma \in \Pi$ et $\gamma(c) > s$ implique $\gamma(b_{i_k}) > r$ pour un certain $k$ $(1 \leq k \leq n)$.

On dit que $\Pi$ est *confiné* si $P(c)$ est vraie pour tout $c \in C$.

**Remarque 2** Un ensemble $\Pi \subset \Gamma$ uniformément intérieurement régulier sur $C$ est confiné.

**Théorème 4** *Un ensemble* $\Pi \subset \Gamma$ *est étroitement net-compact dans* $\Gamma$ *si et seulement si* $\Pi$ *est confiné.*

*Si* $L$ *est un treillis avec* $(A, B)$ *vérifiant les propriétés (I), (S), (H), alors les assertions précédentes sont encore vraies en remplaçant* $\Gamma$ *par* $\Gamma_{sa}$ *(resp.* $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m, \Gamma_{a,1}$*).*

*Preuve.* Soit $\Pi \subset \Gamma$ net-compact et supposons que $\Pi$ ne vérifie pas la condition de l'énoncé. Il existe $c \in C$, un ensemble $\{b_i; i \in I\} \subset B$, et $r < s$ dans $]0, \infty[$ tels que

- si $a \in A$ et $a \leq c$ alors $a \leq b_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$.
- pour toute partie finie $\{b_1, ..., b_m\} \subset \{b_i; i \in I\}$ il existe $\gamma_{\{b_1,...,b_m\}} \in \Pi$ tel que $\gamma_{\{b_1,...,b_m\}}(c) > s$ et $\gamma_{\{b_1,...,b_m\}}(b_k) \leq r$ pour tout $k$ $(1 \leq k \leq m)$.

Ordonnons les parties finies de $\{b_i; i \in I\}$ de la manière suivante: $\{b_k; 1 \leq k \leq n\} \leq \{b_l; 1 \leq l \leq m\}$ si et seulement si pour tout $k$ $(1 \leq k \leq n)$ il existe $l$ $(1 \leq l \leq m)$ tel que $b_k \leq b_l$. Définissons une application $N$ de l'ensemble de ces parties finies, à valeurs dans $\Pi$ par $N(\{b_1, ..., b_m\}) = \gamma_{\{b_1,...,b_m\}}$. Alors, $N$ est un net dans $\Pi$, et puisque $\Pi$ est net-compact, il existe $\gamma \in \overline{\Pi}$ qui est limite d'un sous-net avec $\gamma \in \{\delta \in \Gamma; \delta(c) \geq s\} \cap \{\delta \in \Gamma; \delta(b) \leq r\}$ pour tout $b \in \{b_i; i \in I\}$. Mais puisque $\gamma(c) > r$, il existe $a \in A$, $a \leq c$ et $b_{i_0} \in \{b_i; i \in I\}$, $b_{i_0} \geq a$ avec $\gamma(b_{i_0}) \geq \gamma(a) > r$ d'où la contradiction.

Réciproquement, supposons $\Pi \subset \Gamma$ confiné et non net-compact. Soit $\mathcal{V}_{max}$ le recouvrement ouvert maximal du Lemme 1 où la sous-base est celle de la Remarque 1. Définissons les applications suivantes:

*i)* $\rho(b) = \inf\{r > 0; \{\delta \in \Gamma; \delta(b) > r\} \in \mathcal{V}_{max}\}$ pour tout $b \in B$.

*ii)* $\lambda(a) = \inf_{b \geq a, b \in B} \ \rho(b)$ pour tout $a \in A$.

*iii)* $\lambda(l) = \sup_{a \leq l, a \in A} \ \lambda(a)$ pour tout $l \in L$.

Puisque $\lambda(a) \leq \lambda(b) \leq \rho(b)$ pour tout $b \in B$ et pour tout $a \in A$ avec $b \geq a$, on obtient $\lambda(a) = \inf_{b \geq a, b \in B} \ \lambda(b)$ pour tout $a \in A$, et $\lambda(0) = \rho(0) = 0$, d'où $\lambda \in \Gamma$.

Il existe donc $W \in \mathcal{V}_{max}$ tel que $\lambda \in W$. Si $W$ était de la forme $W = \{\delta \in \Gamma; \delta(b) > x\}$ avec $b \in B$ et $x > 0$, on aurait $\rho(b) > x$ d'où la contradiction. Donc $W$ est de la forme $W = \{\delta \in \Gamma; \delta(c) < y\}$ avec $c \in C$ et $y > 0$. Choisissons $r \in ]\lambda(c), y[$ et observons que $\lambda(a) < r$ pour tout $a \in A$ avec $a \leq c$, et qu'il existe donc d'après *ii)* $b_a \in B$ tel que $b_a \geq a$ et $\rho(b_a) < r$. D'après *i)*, il existe $0 < r' < r$ tel que $\{\delta \in \Gamma; \delta(b_a) > r'\} \in \mathcal{V}_{max}$ et par maximalité de $\mathcal{V}_{max}$ et le fait que $\{\delta \in \Gamma; \delta(b_a) > r\} \subset \{\delta \in \Gamma; \delta(b_a) > r'\}$, on doit avoir $\{\delta \in \Gamma; \delta(b_a) > r\} \in \mathcal{V}_{max}$. Puisque $\Pi$ est confiné, il existe $\{b_{a_1}, ..., b_{a_m}\} \subset \{b_a; a \in A\}$ tel que si $\gamma \in \Pi$ avec $\gamma(c) > (y + r)/2 > r$ alors $\gamma(b_{a_k}) > r$ pour un certain $k$ $(1 \leq k \leq m)$. Soit $\gamma \in \Pi$. Puisque $W = \{\delta \in \Gamma; \delta(c) < y\} \in \mathcal{V}_{max}$, si $\gamma \notin W$ alors $\gamma(c) \geq y > (y+r)/2$ et $\gamma(b_{a_k}) > r$ pour un certain $k$ $(1 \leq k \leq m)$ et donc $\gamma \in \{\delta \in \Gamma;\ \delta(b_{a_k}) > r\} \in \mathcal{V}_{max}$. On obtient donc un sous-recouvrement fini de $\Pi$, d'où la contradiction.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. □

**Corollaire 4** *Un ensemble* $\Pi \subset \Gamma_{[0,\infty[}$ *est étroitement net-compact dans* $\Gamma_{[0,\infty[}$ *si et seulement si* $\Pi$ *est borné et confiné.*

*Si* $L$ *est un treillis avec* $(A, B)$ *vérifiant les propriétés (I), (S), (H), alors les assertions précédentes sont encore vraies en remplaçant* $\Gamma$ *par* $\Gamma_{sa}$ *(resp.* $\Gamma_{ssa}, \Gamma_a, \Gamma_m, \Gamma_{a,1}$*).*

*Preuve.* Soit $\Pi \subset \Gamma_{[0,s]}$ $(s < \infty)$ confiné. D'après le Théorème 4, $\Pi$ est net-compact dans $\Gamma$, et pour tout $\gamma'$ appartenant à la clôture étroite de $\Pi$, $\gamma'(1) \leq \sup_{\gamma \in \Pi} \gamma(1) \leq s$.

Réciproquement, si $\Pi \subset \Gamma_{[0,\infty[}$ est étroitement net-compact dans $\Gamma_{[0,\infty[}$, $\Pi$ est également net-compact dans $\Gamma$ et donc confiné. Supposons que $\{\gamma(1); \gamma \in \Pi\}$ ne soit pas borné. Pour tout entier $n \geq 1$ choisissons $\gamma_n \in \Pi$ tel que $\gamma_n(1) > n$. Soit $\gamma$ un point limite de la suite $(\gamma_n)$, et $m > \gamma(1)$. Alors $\{\delta \in \Gamma; \delta(1) < m\}$ est un ouvert contenant $\gamma$ et donc $\gamma_n$ pour $n \in \mathbf{N}$ assez grand, d'où la contradiction.

La dernière assertion résulte de la Proposition 1. □

### 2.3 Grandes Déviations

Remarquons d'abord que si $\gamma \in \Gamma$ et $t \in ]0, \infty[$, alors $\gamma^t$ defini par $\gamma^t(Y) = \gamma(Y)^t$ pour tout $Y \subset X$ est une capacité; si de plus $t \leq 1$ et $\gamma \in \Gamma_{sa}$, alors $\gamma^t \in \Gamma_{sa}$.

**Définition 5** Soit $(t_\alpha)$ un net dans $]0, \infty[$ convergeant vers 0. Un net $(\gamma_\alpha)$ dans $\Gamma$ satisfait un *principe vague* (resp. *étroit*) *de grandes déviations* avec limite $\gamma \in \Gamma$ et poids $(t_\alpha)$ si $(\gamma_\alpha^{t_\alpha})$ converge vaguement (resp. étroitement) vers $\gamma$.

**Proposition 2** *Supposons que $L$ soit un treillis avec $(A, B)$ satisfaisant les propriétés (I), (S). Si un net dans $\Gamma_{sa}$ satisfait un principe vague de grandes déviations, alors sa limite est maxitive.*

*Preuve.* Soit $(\gamma_\alpha)$ un net dans $\Gamma_{sa}$ satisfaisant un principe vague de grandes déviations avec limite $\gamma$ et poids $(t_\alpha)$. Remarquons que si $a \in A$ et $\gamma(a) < x < \infty$, alors il existe $b \in B$, $b \geq a$ tel que $\limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(b) < x$. En effet, choisissons $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$ tels que $a \leq b \leq a' \leq b'$ avec $\gamma(b') < x$. On obtient alors

$$\limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(a) \leq \limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(b) \leq \limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(a') \leq \gamma(a') \leq \gamma(b') < x.$$

Si $\gamma \notin \Gamma_m$, alors il existe $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $0 < x < \infty$ tels que $\gamma(a_1 \vee a_2) > x$ et $x > \gamma(a_1) \vee \gamma(a_2)$. Il existe $b_1, b_1', b_2, b_2'$ dans $B$, $a_1', a_2'$ dans $A$ tels que $b_1 \geq a_1' \geq b_1' \geq a_1$, $b_2 \geq a_2' \geq b_2' \geq a_2$, $\limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(b_1) < x$ et $\limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(b_2) < x$. D'après la propriété (S), et puisque $\gamma^{t_\alpha} \in \Gamma_{sa}$ pour $\alpha$ assez grand, on a

$$x < \gamma(a_1 \vee a_2) \leq \gamma(b_1' \vee b_2') \leq \liminf \gamma_\alpha^{t_\alpha}(b_1' \vee b_2') \leq \limsup \gamma_\alpha^{t_\alpha}(a_1' \vee a_2') \leq$$

$$\limsup 2^{t_\alpha}(\gamma_\alpha(a_1')^{t_\alpha} \vee \gamma_\alpha(a_2')^{t_\alpha}) \leq \limsup \gamma_\alpha(a_1')^{t_\alpha} \vee \limsup \gamma_\alpha(a_2'))^{t_\alpha} < x,$$

d'où la contradiction. □

Comme conséquences directes des Théorèmes 1, 2 et 3, nous obtenons la proposition suivante.

**Proposition 3** *Soit $(t_\alpha)$ un net dans $]0, \infty[$ convergeant vers 0. Tout net $(\gamma_\alpha)$ dans $\Gamma$ admet un sous-net vérifiant un principe vague de grandes déviations avec poids $(t_\alpha)$. Si $L$ est un treillis et le net $(\gamma_\alpha^{t_\alpha})$ admet une partie terminale bornée et tendue, alors ce principe est étroit.*

*Si $(A, B)$ vérifie les hypothèses du Théorème 2, on peut remplacer "net" par "suite" dans les assertions précédentes.*

## 3 Exemples

### 3.1 Capacités ensemblistes

Soit $X$ un espace topologique séparé, $L$ (resp. $A$, $B$, $C$) $= \mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$). Les Définitions 1 et 2 donnent les espaces vague et étroit de capacités sur

$X$ au sens de [11]. Les propriétés (S), (H) sont évidemment satisfaites, et (I) est satisait si et seulement si $X$ est localement compact. L'hypothèse du Théorème 2 est vérifiée si et seulement si $X$ est à base dénombrable.

La Proposition 1 et les Théorèmes 1, 2 et 4 sont démontrés dans [10] et [12]. Les Corollaires 1 et 2 sont seulement énoncés dans [9] pour $X$ localement compact à base dénombrable. La notion de contrôle pour un net généralise celle donnée pour une suite dans [11], et le Théorème 3 généralise le Théorème 3.1 (a) de [11]. Notons que dans [12], la net-compacité est rebaptisée relative compacité.

Rappelons comment on obtient certains résultats classiques de compacité vague et étroite concernant les mesures de Radon sur un espace localement compact séparé. Il s'agit d'identifier certaines classes de capacités avec des classes de mesures, et ensuite d'utiliser les théorèmes de compacité.

Une mesure de Borel $\mu$ sur un espace topologique $X$ est *régulière* si $\mu(Y) = \inf_{G \supset Y, G \in \mathcal{G}} \mu(G) = \sup_{K \subset Y, K \in \mathcal{K}} \mu(K)$ pour tout borélien $Y \subset X$. Une *mesure de Radon* sur $X$ est une mesure de Borel telle que $\mu(Y) = \sup_{K \subset Y, K \in \mathcal{K}} \mu(K)$ pour tout borélien $Y \subset X$, et $\mu(K) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$. Quand $X$ est à base dénombrable, une mesure de Radon est régulière ([4]).

Un ensemble $\Pi \subset \Gamma_{sa,[0,\infty[}$ est tendu (au sens de la Définition 3) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\sup_{\gamma \in \Pi} \mu(X \backslash K) < \varepsilon$ ([10]) (au sens de Bourbaki, un ensemble de mesures régulières est tendu s'il est borné et vérifie la condition précédente).

Si $X$ est régulier, alors $\gamma \in \Gamma_a$ si et seulement si $\gamma$ est l'extension à $\mathcal{P}(X)$ (donnée par la relation (ii) de la Définition 1) d'une mesure de Borel intérieurement régulière sur les boréliens et extérieurement régulière sur $\mathcal{K}$ ([12]). Donc, $\Gamma_{a,[0,\infty[}$ muni de la topologie étroite est homéomorphe à l'ensemble des mesures régulières bornées sur $X$ muni de la topologie étroite usuelle. En particulier, lorsque $X$ est localement compact, on retrouve des résultats classiques de la manière suivante:

- Le Théorème 1 avec $\Gamma_{a,[0,s]}$ ($s < \infty$) donne la compacité vague de l' ensemble des mesures régulières de masse inférieure à $s$.

- D'après la partie "(i) et (iv) $\Rightarrow$ (ii)" du Théorème 3, dans l'ensemble des mesures régulières bornées (resp. de probabilité), un net qui est tendu et vaguement convergent, l'est étroitement.

- Le Corollaire 1 avec $\Pi \subset \Gamma_{a,1}$, et le résultat précédent donnent le critère de relative compacité étroite (Théorème de Prohorov) dans l'ensemble des mesures de probabilités régulières.

- D'après le Théorème 3, dans l'ensemble des mesures régulières bornées (resp. de probabilité), un net converge étroitement si et seulement s'il converge vaguement et s'il est contrôlé.

- Si un ensemble borné de mesures regulières est tendu, alors sa clôture étroite est bornée et tendue. Le Corollaire 3 avec $\Gamma_{a,[0,\infty[}$ et $\Gamma_{a,1}$ donne les deux versions du théorème direct de Prohorov: dans l'ensemble des mesures régulières (resp. de probabilité), un ensemble tendu et borné est étroitement relativement compact.

- Un ensemble borné de mesures regulières est uniformément intérieurement régulier sur $\mathcal{F}$ si et seulement si sa clôture étroite est bornée et tendue. La Remarque 2 et le Corollaire 4 avec $\Gamma_{a,[0,\infty[}$ et $\Gamma_{a,1}$ donnent également les deux versions du théorème direct de Prohorov.

Si $X$ est localement compact à base dénombrable, $\Gamma_{a,<}$ muni de la topologie vague est homéomorphe à l'ensemble des mesures de Radon muni de la topologie vague usuelle.

- Le Corollaire 2 avec $\Gamma_{a,<}$ donne le critère de relative compacité vague dans l'ensemble des mesures de Radon.

- La version séquentielle du théorème direct de Prohorov dans $\Gamma_{a,[0,\infty[}$ et $\Gamma_{a,1}$ est obtenue comme précédemment en utilisant le Théorème 2.

Rappelons qu'une famille $\{\mu_\alpha; \alpha > 0\}$ de mesures de probabilités régulières sur un espace séparé $X$ satisfait un principe vague (resp. étroit) de grandes déviations avec poids $\{t_\alpha; \alpha > 0\} \subset ]0, \infty[$ (où $(t_\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to 0$) s'il existe une fonction semi-continue inférieurement $J : X \to [0, \infty]$ (dite fonction de taux) telle que:

(i) $\limsup \mu_\alpha(Y)^{t_\alpha} \leq \sup_{x\in Y} \exp(-J(x))$ pour tout $Y \in \mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{F}$),

(ii) $\liminf \mu_\alpha(G)^{t_\alpha} \geq \sup_{x\in G} \exp(-J(x))$ pour tout $G \in \mathcal{G}$.

Il existe une bijection entre l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement $J : X \to [0, \infty]$ et l'ensemble $\Gamma_{m,[0,1]}$ donnée par la relation: $\gamma(Y) = \sup_{x\in Y} \exp(-J(x))$ pour tout $Y \subset X$ ([12]). Il est facile de voir que $\gamma \in \Gamma_{m,[0,1]}$ est tendue si et seulement si sa fonction associée $J$ vérifie: $\{x \in X; J(x) \leq s\}$ est compact pour tout $s > 0$.

Donc, $\{\mu_\alpha; \alpha > 0\}$ satisfait un principe vague (resp. étroit) de grandes déviations avec poids $\{t_\alpha; \alpha > 0\}$ et fonction de taux $J$ si et seulement si le net de capacités $(\mu_\alpha^{t_\alpha})$ converge vaguement (resp. étroitement) vers la capacité $\gamma$ associée à $J$.

La tension d'une partie terminale du net $(\mu_\alpha^{t_\alpha})$ est plus connue sous le nom de tension exponentielle de la famille $\{\mu_\alpha; \alpha > 0\}$ ([5]). Lorsque $X$ est localement compact, les Propositions 2 et 3 donnent les résultats bien connus suivants:

- Tout net $\{\mu_\alpha; \alpha > 0\}$ de mesures de probabilité régulières admet un sous-net vérifiant un principe vague de grandes déviations avec poids $\{t_\alpha; \alpha > 0\}$.

- Si une famille exponentiellement tendue $\{\mu_\alpha; \alpha > 0\}$ de mesures de probabilité régulières sur $X$ satisfait un principe vague de grandes déviations avec poids $\{t_\alpha; \alpha > 0\}$ et fonction de taux $J$, alors $\{\mu_\alpha; \alpha > 0\}$ satisfait un principe étroit de grandes déviations avec mêmes poids et même fonction de taux qui de plus vérifie: $\{x \in X; J(x) \leq s\}$ est compact pour tout $s > 0$ (puisque $\{\mu_\alpha^{t_\alpha}; \alpha \geq \alpha_0\}$ est tendu pour $\alpha_0$ assez grand, la capacité limite associée à $J$ l'est également).

## 3.2 Capacités fonctionnelles

Soit $X$ un espace localement compact métrisable, $L = \mathbf{R}_+{}^X \cup \{\infty\}$ (élément de $\overline{\mathbf{R}_+}^X$ constant ayant valeur infinie), $A = \{l \in \mathbf{R}_+^X;\ l$ semi-continue supérieurement à support compact$\}$, $B = \{l \in \mathbf{R}_+^X; l$ semi-continue inférieurement $\} \cup \{\infty\}$, et $C = \{l \in \mathbf{R}_+^X; l$ semi-continue supérieurement$\} \cup \{\infty\}$. Notons $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$) $= \{l \in \mathbf{R}_+^X; l$ continue (resp. borélienne)$\}$. Alors, $L$ est un treillis avec un élément minimal 0, un élément maximal $\infty$, $0 \in A \cap B$, $\infty \in B \cap C$, $A \subset C$, et $(A, B)$ satisfait la propriété (S). De plus, $(A, B)$ satisfait la propriété (I) puisque pour tout $a \in A$, $b \in B$ avec $a \leq b$, il existe $h \in \mathcal{C}$ telle que $a \leq h \leq b$ ([7], Théorème 3.3.5).

**Lemme 2** *Soit $\gamma : A \to [0, \infty]$ avec $\gamma(0) = 0$. Si $\gamma(a_n)$ décroît vers $\gamma(a)$ pour toute suite $(a_n)$ dans $A$ décroissant vers $a \in A$, alors $\gamma$ s'étend en une capacité $\gamma_* \in \Gamma$ par $\gamma_*(l) = \sup_{a \leq l, a \in A}\ \gamma(a)$ pour tout $l \in L$.*

*Preuve.* Pour tout $a \in A$, il existe une suite $(h_n)$ dans $\mathcal{C} \cap A$ décroissant vers $a$, d'où $\gamma(a) \leq \inf_{b \geq a, b \in B} \gamma_*(b) \leq \inf \gamma(h_n) = \gamma(a)$, et $\gamma \in \Gamma$. $\square$

**Exemple 1** Soit $\mu$ une mesure de Radon bornée sur $X$, et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\gamma_{\mu,n}$ défini par $\gamma_{\mu,n}(l) = \sup_{a \leq l, a \in A} \mu(a^n)$ pour tout $l \in L$ est une capacité fonctionnelle, et $\gamma_{\mu,n}(h) = \mu(h^n)$ pour tout $h \in \mathcal{B}$.

**Exemple 2** Soit $f : X \to [0, \infty]$ semi continue supérieurement. D'après le lemme de Dini-Cartan, la fonction $\gamma_f : A \to [0, \infty]$ définie par $\gamma_f(a) = \sup_{x \in X} f(x)a(x)$ pour tout $a \in A$ vérifie les hypothèses du Lemme 2, et s'étend donc en une capacité fonctionnelle par $\gamma_f(l) = \sup_{a \leq l, a \in A} \gamma_f(a)$.

Supposons maintenant $X$ compact métrisable. Les capacités fonctionnelles de Choquet sur un tel espace ont été introduite dans [4], ce sont les applications $\lambda$ de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ telles que pour toute suite $(a_n)$ dans $A$ décroissant vers $a \in A$, $\gamma(a_n)$ décroît vers $\gamma(a)$, et pour toute suite $(h_n)$ dans $\mathcal{B}$ croissant vers $h \in \mathcal{B}$, $\gamma(h_n)$ croît vers $\gamma(h)$. Une conséquence directe du Théorème 3 de [3] permet de caractériser les capacités fonctionnelles positives de Choquet qui s'annullent sur la fonction nulle parmi les éléments de $\Gamma$.

**Proposition 4** *Soit $X$ un espace compact métrisable, et $\Lambda$ l'ensemble des capacités fonctionnelles positives de Choquet sur $X$ qui s'annullent en 0. Alors, $\lambda \in \Lambda$ si et seulement si $\lambda = \gamma_{|\mathcal{B}}$ avec $\gamma \in \Gamma$ vérifiant la condition suivante: pour toute suite monotone $(a_n)$ dans $A$ convergeant vers $a \in A$, $\lim \gamma(a_n) = \gamma(a)$.*

*Preuve.* Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors $\lambda_{|A}$ vérifie les hypothèses du Lemme 2 et s'étend donc en un élément $\gamma = (\lambda_{|A})_* \in \Gamma$ par $\gamma(l) = \sup_{a \leq l, a \in A} \lambda(a)$ pour tout $l \in L$. D'après la forme fonctionnelle du théorème de capacitabilité de Choquet ([4]), $\gamma_{|\mathcal{B}} = \lambda$.

Réciproquement, si $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma_{|A}$ vérifie la condition de l'énoncé, alors d'après le Théorème 3 de [3], $\gamma_{|A}$ s'étend en une unique capacité fonctionnelle de Choquet $\lambda$ définie par $\lambda(h) = \sup_{a \leq h, a \in A} \lambda(a)$ pour tout $h \in \mathcal{B}$. $\square$

**Remarque 3** Soit $(\mu_n)$ une suite de mesures de probabilité sur $X$ compact métrisable, $(\gamma_{\mu_n,n})$ la suite de capacités de l'Exemple 1, $J : X \to [0, \infty]$ semi continue inférieurement, et $\gamma_f$ la capacité de l'Exemple 2 associée à $f = \exp(-J)$. Alors, $(\mu_n)$ satisfait un principe de grandes déviations (au sens usuel) avec taux $J$ et poids $(1/n)$ si et seulement si $(\gamma_{\mu_n,n})$ satisfait un principe de grandes déviations avec limite $\gamma_f$ et poids $(1/n)$ (au sens de la Définition 5). En effet, $(\gamma_{\mu_n,n}^{1/n})$ converge vaguement vers $\gamma_f$ si et seulement si $\lim \gamma_{\mu_n,n}^{1/n}(h)$ converge vers $\gamma_f(h)$ pour tout $h \in \mathcal{C}$. D'après le théorème de Varadhan et sa réciproque ([6], Théorèmes 1.2.1 et 1.3.4), $(\mu_n)$ satisfait un principe de grandes déviations avec taux $J$ et poids $(1/n)$ si et seulement si pour tout $h \in \mathcal{C}$,

$$\lim(\mu_n(h^n))^{1/n} = \sup_{x \in X} f(x)h(x).$$

## 3.3 Capacités non commutatives

Soit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $L = B = C$ l'ensemble des projections orthogonales dans $\mathcal{H}$, et $A$ l'ensemble des projections orthogonales de rang fini. Alors, $L$ est un treillis avec la projection 0 pour élément minimal, l'opérateur identité (noté 1) pour élément maximal, $0 \in A \cap B$, $1 \in B \cap C$, $A \subset C$, et $(A, B)$ satisfait les propriétés (I), (S), (H).

**Exemple 3** Rappelons qu'une forme linéaire positive $\omega$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est normale si pour tout net croissant borné $(x_\alpha)$ d'opérateurs autoadjoints de limit $x$, $\lim \omega(x_\alpha) = \omega(x)$. Il est clair qu'une telle forme retreinte à $L$ est une capacité.

**Exemple 4** Soit $z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positif, et considérons la fonction $\gamma$ définie sur $L$ par:

$$\forall p \in L, \quad \gamma(p) = \sup\{\lambda \in \sigma(z); \forall \varepsilon > 0, pE_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]} \neq 0\} \tag{2}$$

où $E$ est la projection spectrale associée à $z$. Puisque $\gamma(0) = 0$ (avec la convention $\sup \emptyset = 0$) la proposition suivante montre que $\gamma$ est une capacité maxitive.

**Proposition 5** *L'équation (2) définit une application complètement maxitive sur $L$ (i.e. $\gamma(\bigvee_{i \in I} p_i) = \bigvee_{i \in I} \gamma(p_i)$ pour toute famille $\{p_i; i \in I\} \subset L$).*

*Preuve.* Nous allons d'abord établir deux propriétés préliminaires.

Propriété 1: $p \leq E_{\gamma(p)}$ pour tout $p \in L$. Soit $\lambda_0(p) = \inf\{\lambda \in \mathbf{R}; p \leq E_\lambda\}$, et remarquons que $\lambda_0(p) \in \sigma(z)$ (sinon il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E_{\lambda_0(p)-\varepsilon} = E_{\lambda_0(p)+\varepsilon}$, et $p \leq E_{\lambda_0(p)-\varepsilon}$ donne la contradiction). Puisque la famille spectral $\{E_\lambda\}$ est continue à droite, on obtient $p \leq E_{\lambda_0(p)}$. Supposons $\lambda_0(p) > \gamma(p)$. Alors, $p(E_{\lambda_0(p)+\varepsilon} - E_{\lambda_0(p)-\varepsilon}) = 0$ pour un certain $\varepsilon > 0$ avec $E_{\lambda_0(p)+\varepsilon} - E_{\lambda_0(p)-\varepsilon} \neq 0$. Puisque $p \leq E_{\lambda_0(p)+\varepsilon}$, on a $p \leq E_{\lambda_0(p)-\varepsilon}$ qui donne la contradiction. Donc, $p \leq E_{\lambda_0(p)} \leq E_{\gamma(p)}$.

Propriété 2: $\gamma(E_{[0,\lambda[}) \leq \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Supposons $\gamma(E_{[0,\lambda[}) > \lambda$, alors il existe $\mu \in \sigma(z)$ avec $\gamma(E_{[0,\lambda[}) \geq \mu > \lambda$ et $E_{[0,\lambda[}(E_{\mu+\varepsilon} - E_{\mu-\varepsilon}) \neq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $E_{[0,\lambda[} \not\leq E_{\mu-\varepsilon}$. Mais $E_{[0,\lambda[} \leq E_\lambda \leq E_{\mu-\varepsilon}$ pour $\varepsilon$ suffisamment petit, d'où la contradiction.

Nous pouvons montrer maintenant que $\gamma$ est complètement maxitive sur $L$. Soit $\{p_i; i \in I\} \subset L$. D'après la Propriété 1, $p_i \leq E_{\gamma(p_i)}$ pour tout $i \in I$, et donc $\bigvee_{i\in I} p_i \leq E_{\bigvee_{i\in I}\gamma(p_i)}$. D'où, $\bigvee_{i\in I} p_i \leq E_{[0,\bigvee_i \lambda_0(p_i)+\varepsilon[}$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'après la Propriété 2, et puisque $\gamma$ est clairement croissante, on a $\gamma(\bigvee_{i\in I} p_i) \leq \gamma(E_{[0,\bigvee_{i\in I}\gamma(p_i)+\varepsilon[}) \leq \bigvee_{i\in I}\gamma(p_i) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

**Remarque 4** Une suite $(\omega_n)$ de formes positives normales sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ converge vaguement (resp. étroitement) vers une forme positive normale $\omega$ si et seulement si $\lim \omega_n(p) = \omega(p)$ pour tout $p \in A$ (resp. $L$). Donc, $(\omega_n)$ converge vaguement vers $\omega$ si et seulement si $\lim \omega_n(x) = \omega(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de rang fini. Cette définition coïncide avec celle de convergence vague d'une suite $(\omega_n)$ d'états normaux, donnée dans [8]; cette suite est dite converger étroitement si de plus sa limite est un état. Supposons maintenant qu'une suite $(\omega_n)$ d'états normaux converge étroitement au sens des capacités vers une forme positive normale $\omega$, alors $\lim \omega_n(1) = 1 = \omega(1)$, et donc $\omega$ est un état. Réciproquement, si $(\omega_n)$ converge vaguement vers un état normal, alors il est démontré dans [8] que $\lim \omega_n(x) = \omega(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ce qui implique la convergence étroite au sens des capacités. Ainsi, pour une suite d'états normaux, les définitions de convergence vague et étroite vers une forme positive normale coïncident avec celles de [8].

**Remarque 5** L'ensemble $A$ (resp. $B$, $C$) correspond à l'ensemble des projections compactes (resp. ouvertes, fermées) par rapport à la C*-algèbre des opérateurs compacts dans $\mathcal{H}$, au sens de la topologie non commutative ([2], [13]).

# References


[1] Beran L., 1985. Orthomodular lattices, *D. Reidel Publishing Company.*

[2] Brown L.G., 1988. Semicontinuity and multipliers of C*-algebras, *Canad. J. Math., Vol* ***XL****, No. 4, pp. 865-988.*

[3] Dellacherie C., 1997. Une version non linéaire du théorème de représentation de Riesz, *C.R. Acad. Sci. Paris, 324, série I, pp. 1011-1014.*

[4] Dellacherie C., Meyer P. A., 1983. Probabilités et potentiel, *Hermann, Paris.*

[5] Deuschel J.d. and Stroock D.W., 1989. Large Deviations, *Academic Press.*

[6] Dupuis P. et Ellis R. S. 1997. A weak convergence approach to the theory of large deviations, *John Wiley and sons.*

[7] Lojasiewicz S., 1988. The theory of real functions, *John Wiley and Sons.*

[8] Meyer P.A., 1994. Quantum probability for probabilists, *Lect. Notes Math., 1538, Springer-verlag.*

[9] Norberg T., 1986. Random capacities and their distributions, *Prob. Th. Rel. Fields 73, pp. 281-297.*

[10] O'Brien G. L. et Vervaat W., 1991. Capacities, large deviations and loglog laws, *Stable Processes and Related Topics, Birkhauser, pp. 43-84.*

[11] O'Brien G. L., 1996. Sequence of capacities with connections to large deviation theory, *Journal of Theoretical Probability, 9, pp. 19-35.*

[12] O'Brien G.L. et Watson S., 1998. Relative compactness for capacities, measures, upper semicontinuous functions and closed sets. *Journal of Theoretical Probability, 11, pp. 577-588.*

[13] Pedersen G.K., 1979. C*-algebras and their automorphism groups, *Academic Press, London.*

[14] Topsøe F., 1970. Topology and measure, *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 133, Springer-Verlag.*