

Dinámica en Superficies

Martín Sambarino

VI Escuela Internacional-Santiago de Chile
julio 2007

Resumen

Estos apuntes tratan de la teoría hiperbólica y algunos desarrollos ulteriores. No es nuestra intención hacer una exposición detallada de estos temas puesto que es imposible abarcarlo en un cursillo. Nuestro objetivo es presentar algunas ideas y conceptos fundamentales en un contexto lo mas sencillo posible. Las demostraciones que están incluidas en estos apuntes tienen un carácter elemental de forma de hacerlas accesibles a estudiantes que no tengan un estudio previo de la teoría hiperbólica. Espero que a los estudiantes les quede un ruido, o mejor dicho una música, sobre estos temas que le faciliten los estudios posteriores en la materia.

Agradecimientos: A Rafael que me dejó usar dibujos de su monografía ([Po]).

Índice general

1. Introducción a la hiperbólicidad	2
1.1. Transformaciones lineales hiperbólicas	2
1.1.1. Estabilidad	3
1.2. Puntos fijos hiperbólicos: Teorema de Hartman	7
1.3. Sistemas de Anosov lineales en \mathbb{T}^n	9
1.4. Herradura de Smale y puntos homoclínicos	11
2. Difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2.	15
2.1. Algunos resultados de dinámica hiperbólica	20
3. Perturbaciones en la topología C^1.	24
3.1. Lema de Franks	24
3.2. Producto de matrices	25
3.3. Aplicaciones a $Diff^1(M)$	28
4. Estabilidad Estructural	29
4.1. Descomposición dominada	29
4.2. Integrabilidad de la descomposición dominada	30
4.3. Prueba del Teorema 4.0.2	34

Capítulo 1

Introducción a la hiperbolicidad

Andante

La hiperbolicidad representa un papel central en la teoría de sistemas dinámicos: es el paradigma de los sistemas llamados “caóticos” (son sistemas inherentemente impredecibles) a pesar de lo cual se tiene una descripción bastante completa de su dinámica. Por otro lado tienen propiedades de estabilidad, lo que implica que esta “caoticidad” no se destruye por pequeñas perturbaciones del sistema.

Comenzaremos estudiando transformaciones lineales hiperbólicas donde, a pesar de la dinámica ser trivial (por no existir recurrencia no trivial), varias de las ideas y métodos de la teoría se presentan de forma más elemental.

Seguiremos luego con lo que es llamada la teoría hiperbólica local y el teorema de Hartman. Luego estudiaremos dos ejemplos clásicos de la dinámica hiperbólica.

1.1. Transformaciones lineales hiperbólicas

Definición 1.1.1. Una transformación lineal (invertible) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *hiperbólica* si todos sus valores propios tienen módulo diferente de 1.

Lema 1.1.1. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica tal que todos sus valores

proprios tienen módulo menor que 1. Entonces existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$, $n \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Es fácil ver que existe n_0 tal que $\|A^{n_0}\| < \gamma < 1$. Sea $C_1 = \sup\{\|A^j\| : j = 0, \dots, n_0\}$ y $\lambda = \gamma^{1/n_0}$. Dado cualquier $n \geq 0$, escribimos $n = kn_0 + r$ con $0 \leq r < n_0$. Resulta entonces que

$$\|A^n\| \leq \|A^{kn_0}\| \|A^r\| \leq C_1 \gamma^k \leq \frac{C_1}{\gamma} \lambda^n = C\lambda^n.$$

□

Lema 1.1.2. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Entonces existen subespacios E^s , E^u (llamados subespacio estable e inestable respectivamente) tales que:

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. $A(E^s) = E^s$, $A(E^u) = E^u$, es decir, E^s y E^u son invariantes por A .
3. Existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que:

$$\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, n \geq 0, v \in E^s \quad \text{y} \quad \|A^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|, n \geq 0, v \in E^u.$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos $E_x^s = x + E^s$ y $E_x^u = x + E^u$. Se tiene que si $y \in E_x^s \implies \|A^n y - A^n x\| \leq C\lambda^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ si $n \geq 0$. Análogamente, para $n \geq 0$ e $y \in E_x^u$ se tiene que $\|A^{-n} y - A^{-n} x\| \leq C\lambda^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. □

1.1.1. Estabilidad

Lema 1.1.3 (Norma adaptada). Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hiperbólica, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacio estable e inestable. Entonces existe una norma $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$ tal que

$$\|A|_{E^s}\|_1 < a < 1 \quad \text{y} \quad \|A|_{E^u}^{-1}\|_1 < a < 1.$$

Demostración. Supongamos primeramente que $E^s = \mathbb{R}^n$. Sabemos que existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n\| \leq C\lambda^n$. Consideremos n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < 1$. Fijado n_0 definimos una nueva norma $\|\cdot\|_s$ definida por

$$\|v\|_s = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j v\|.$$

Es fácil ver que existe K tal que $\|v\|_s \leq K\|v\|$. Luego observamos que:

$$\begin{aligned} \|Av\|_s &= \sum_{j=1}^{n_0} \|A^j v\| = \|v\|_s + \|A^{n_0} v\| - \|v\| \leq \|v\|_s + (C\lambda^{n_0} - 1)\|v\| \\ &\leq \left(1 + \frac{C\lambda^{n_0} - 1}{K}\right) \|v\|_s = a\|v\|_s. \end{aligned}$$

Ahora, en el caso $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, aplicando lo anterior construimos normas $\|\cdot\|_s$ y $\|\cdot\|_u$ en E^s y E^u respectivamente tales que $\|A_{/E^s}\|_s < a < 1$ y $\|A_{/E^u}^{-1}\|_u < a < 1$. Basta definir entonces, escribiendo $v = (v_s, v_u)$ con respecto a la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, la norma $\|\cdot\|_1$ como

$$\|v\|_1 = \max\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\}.$$

□

Definición 1.1.2. Sea $K > 0$. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en \mathbb{R}^n es una K -pseudórbita (con respecto a $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) si $\|Ax_n - x_{n+1}\| \leq K \forall n \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.1.4 (Propiedad de sombreado). *Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una K -pseudórbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^n z - x_n\| \leq \alpha \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Comencemos con un caso particular:

Sublema: *Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal tal que $\|A\| < a < 1$ y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una K -pseudórbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^m z - x_m\| \leq \alpha \forall m \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos $x_m : m \geq 0$. Observemos que por ser A una contracción tenemos que

$$\begin{aligned} \|A^m x_0 - x_m\| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-j} x_j - A^{m-(j+1)} x_{j+1}\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-(j+1)} (Ax_j - x_{j+1})\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} a^{m-(j+1)} K \\ &= K \sum_{j=0}^{m-1} a^j = K \frac{1-a^m}{1-a} \leq \frac{K}{1-a} \end{aligned}$$

Luego, tomando $\alpha = \frac{K}{1-a}$, cualquier K -pseudo órbita positiva $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es sombreada (a menos de α) por la órbita positiva según A de un punto $w = w(x_0)$. Re-indexando la sucesión $\{x_n\}_{n \geq -m}$ encontramos un punto w_m tal que

$$\|A^{n+m}w_m - x_n\| \leq \alpha \quad n \geq -m.$$

Escribiendo $z_m = A^m w_m$ concluimos que $\|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha$ para cualquier $n \geq -m$. Tomando z un punto de acumulación de z_m (y suponiendo que $\lim_m z_m = z$) concluimos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\|A^n z - x_n\| = \lim_m \|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha.$$

Finalmente, tal punto z debe ser único (¿por qué?). □

Continuemos ahora con la demostración de la propiedad del sombreado.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ correspondiente a $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y escribimos $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x_s, x_u)$ con respecto a esta descomposición. Vamos a trabajar con la norma adaptada encontrada en el lema anterior y que notaremos por comodidad $\|\cdot\|$.

Sea x_m , $m \in \mathbb{Z}$ una K -pseudo órbita y tomemos $\alpha = \frac{K}{1-a}$. Escribimos $x_m = (x_s^m, x_u^m)$. Aplicando el sublema a $A|_{E^s}$ y a $A|_{E^u}$ concluimos que existe y_s e y_u tal que $\|A^m y_s - x_s^m\| \leq \alpha$ y $\|A^m y_u - x_u^m\| \leq \alpha$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Luego $y = (y_s, y_u)$ es el punto cuya órbita por A sombrea x_m . □

Lema 1.1.5. *Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo y $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces $G = A + g$ es expansivo con constante de expansividad infinita.*

Demostración. Por comodidad seguimos trabajando con la norma adaptada para A y con la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Consideremos $x \neq y$ dos puntos de \mathbb{R}^n . Supongamos primero que $\|x - y\| = \|x_u - y_u\|$. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= \|(A + g)(x) - (A + g)(y)\| \geq \|Ax - Ay\| - \|g(x) - g(y)\| \\ &\geq a^{-1}\|x_u - y_u\| - \epsilon\|x - y\| = (a^{-1} - \epsilon)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, de forma análoga vemos que $\|(G(x) - G(y))_s\| \leq (a + \epsilon)\|x - y\|$. Concluimos que si ϵ es tal que $a + \epsilon < 1 < a^{-1} - \epsilon$ entonces $\|G(x) - G(y)\| =$

$\|(G(x) - G(y))_u\|$ y $\|G(x) - G(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)\|x - y\|$. Inductivamente tenemos que $\|G^n(x) - G^n(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)^n\|x - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$.

Razonando de la misma manera en el caso $\|x - y\| = \|x_s - y_s\|$ concluimos que $\|G^{-n}(x) - G^{-n}(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)^n\|x - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$.

□

Teorema 1.1.1 (Estabilidad global de mapas lineales hiperbólicos). *Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo que verifica $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ y $G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces G y A son conjugados.*

Demostración. Tenemos que hallar un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H \circ G = A \circ H$. Sea $K > 0$ tal que $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < K$. Vemos entonces que dado cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ la órbita según G , $\{G^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, es una K -pseudo órbita de A . Por la propiedad del sombreado concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ que verifica:

$$\|A^n z - G^n(x)\| \leq \alpha \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Definimos entonces $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $H(x) = z$ donde z es el único punto que verifica (1.1). En otras palabras $\|A^n(H(x)) - G^n(x)\| \leq \alpha \forall n \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos primeramente que H conjugua G con A . En efecto, tenemos que $\|A^n(A \circ H(x)) - G^n(G(x))\| \leq \alpha \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $H(G(x)) = A(H(x))$. De ahí que nos falta probar únicamente que H es un homeomorfismo.

H es continua: sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea x_m una sucesión tal que $x_m \rightarrow x$. Queremos probar que $H(x_m) \rightarrow H(x)$. Sea $H(x_{m_k})$ una subsucesión de $H(x_m)$ que converge a un punto y y sea $p \in \mathbb{Z}$ cualquiera. Observamos que

$$\|A^p y - G^p(x)\| = \lim_k \|A^p(H(x_{m_k})) - G^p(x_{m_k})\| \leq \alpha$$

y por lo tanto $y = H(x)$. Como $H(x_m)$ es una sucesión acotada (por serlo x_m) concluimos que $H(x)$ es el único punto de acumulación de $H(x_m)$. Luego $H(x_m) \rightarrow H(x)$ y probamos que H es continua.

H es inyectiva: Esto es consecuencia de la expansividad de G . En efecto, supongamos que $H(x_1) = H(x_2)$. Deducimos que $\|G^n(x_1) - G^n(x_2)\| \leq 2\alpha \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

H es sobreyectiva: Supongamos que $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(x) \neq y \forall x \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $\overline{B} = \overline{B(0, 4\alpha)}$ la bola (cerrada) de radio 4α centrada en el origen

y la función $g : \bar{B} \rightarrow \partial\bar{B}$ definida por $g(x) = 4\alpha \frac{H(x+y)-y}{\|H(x+y)-y\|}$. Es fácil ver que si $x \in \partial\bar{B}$ entonces $g(x) \neq -x$. Por lo tanto tenemos una función continua de la bola en el borde de la misma y tal que en el borde es (isotópica a) la identidad. Esto contradice el Teorema del punto fijo de Brower.

H^{-1} es continua: Es similar a la prueba de la continuidad de H . \square

1.2. Puntos fijos hiperbólicos: Teorema de Hartman

En lo que sigue M denotará una variedad riemanniana compacta conexa y sin borde.

Definición 1.2.1. Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo y p un punto fijo de f . Decimos que p es hiperbólico si $Df_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es hiperbólico (no tiene valores propios de módulo uno). Un punto periódico de período k se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de f^k .

Teorema 1.2.1 (Teorema de Hartman). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f . Entonces f y Df_p son localmente conjugados. Mas precisamente, existe U_p entorno de p en M y V entorno de 0 en T_pM y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$

Demostración. Por ser un teorema local, usando cartas locales, podemos suponer que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $p = 0 = f(0)$ es punto fijo hiperbólico y consideremos el mapa lineal hiperbólico $A = Df_0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es acotada y tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces A y $A + g$ son conjugados por la estabilidad de A (Teorema 1.1.1).

Por otra parte, escribimos $f(x) = Ax + \phi(x)$, donde ϕ es C^1 , $\phi(0) = 0$ y $D\phi_0 = 0$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|\phi(x)\| \leq \frac{\epsilon}{8}\|x\|$ y $\|D\phi_x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Consideremos una función “chichón” $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(x) = 1$ si $\|x\| \leq \delta/2$, $\rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq \delta$ y $\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{4}{\delta}$.

Sea $G(x) = Ax + \rho(x)\phi(x)$. Resulta que $G(x) = f(x)$ si $\|x\| \leq \delta/2$ y $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$. Por otra parte $DG_x - A = \rho(x)D\phi_x + \phi^T \cdot \nabla\rho(x)$ que es idénticamente nulo si $\|x\| \geq \delta$ y cuando $\|x\| \leq \delta$ tenemos:

$$\|DG_x - A\| \leq |\rho(x)|\|D\phi_x\| + \|\phi(x)\|\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8}\|x\|\frac{4}{\delta} \leq \epsilon.$$

En consecuencia $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ y concluimos que existe $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $H \circ G = A \circ H$. Tomemos $U = B(0, \delta/2)$, $V = H(U)$ y $h = H|_U$. Como $G = f$ en U concluimos que $h \circ f = A \circ h$ como queríamos. \square

Definición 1.2.2. Sea $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo y $x \in M$. Se define el *conjunto estable* de x como

$$W^s(x) = \{y \in M : \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

y el *inestable* como

$$W^u(x) = \{y \in M : \text{dist}(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0\}.$$

Para $\epsilon > 0$ definimos el *conjunto estable e inestable local* (de tamaño ϵ) como

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in M : \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) \leq \epsilon \forall n \geq 0\}$$

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in M : \text{dist}(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \epsilon \forall n \geq 0\}.$$

Corolario 1.2.1. Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que:

1. $W_\epsilon^s(p) \subset W^s(p)$ y $W_\epsilon^u(p) \subset W^u(p)$.
2. $W_\epsilon^s(p)$ (respect. $W_\epsilon^u(p)$) es una subvariedad topológica de la misma dimensión que el espacio estable (respect. inestable).
3. $W^s(p) = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(p))$ y $W^u(p) = \cup_{n \geq 0} f^n(W_\epsilon^u(p))$ y son subvariedades topológicas inmersas en M .

Demostración. Queda como ejercicio. \square

En realidad, vale el siguiente teorema cuya demostración omitiremos:

Teorema 1.2.2 (Teorema de la variedad estable). Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo C^r y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico, $T_p M = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacios estable e inestable de Df_p . Entonces $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son subvariedades inmersas de clase C^r tangentes en p a E^s y E^u respectivamente.

Definición 1.2.3. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo (periódico) hiperbólico $T_p M = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacios estable e inestable de Df_p . Decimos que p es:

- *atractor* si $E^s = T_p M$ (y por lo tanto $E^u = \{0\}$).
- *repulsor* si $E^u = T_p M$ (y por lo tanto $E^s = \{0\}$).
- *silla* si $\{0\} \neq E^s \neq T_p M$ (y por lo tanto lo mismo ocurre con E^u). En este caso definimos el *índice* de p como $\dim E^s$.

Observación 1.2.1. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico.

- Si p es atractor $\implies W^s(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^u(p) = \{p\}$.
- Si p es repulsor $\implies W^u(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^s(p) = \{p\}$.

Teorema 1.2.3 (Kupka-Smale). *Existe un conjunto residual \mathcal{R} en $\text{Diff}^r(M)$ tal que si $f \in \mathcal{R}$ entonces:*

1. *Todo punto periódico de f es hiperbólico.*
2. *$W^s(p)$ y $W^u(q)$ son transversales para cualquier $p, q \in \text{Per}(f)$.*

1.3. Sistemas de Anosov lineales en \mathbb{T}^n .

Consideremos $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, es decir, una matriz con entradas enteras y determinante ± 1 . Resulta que A induce un difeomorfismo en el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Definición 1.3.1. Sea $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica. El difeomorfismo inducido $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ definido por

$$f \circ \Pi = \Pi \circ A$$

donde $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ es la proyección canónica es llamado *difeomorfismo de Anosov lineal*.

Teorema 1.3.1. *Sea $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ un difeomorfismo de Anosov lineal. Entonces:*

1. $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f) = \mathbb{T}^n$.
2. *f es transitivo y topológicamente mixing.*
3. *f es expansivo.*
4. *Para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$, las variedades $W^s(z)$ y $W^u(z)$ son densas en \mathbb{T}^n .*

Demostración. Para simplificar y fijar ideas vamos a hacer la prueba en el caso $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dado por $f \circ \Pi = \Pi \circ A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $q \in \mathbb{Z}$ y consideremos el conjunto $C_q = \{(m/q, n/q) : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Es fácil ver que $A(C_q) = C_q$ y por lo tanto $f(\Pi(C_q)) = \Pi(C_q)$. Sin embargo $\Pi(C_q)$ es un conjunto finito y entonces cada punto de $\Pi(C_q)$ es periódico. Por otro lado $\cup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ es denso en \mathbb{R}^2 y así $\cup_{q \in \mathbb{Z}} \Pi(C_q)$ es denso en \mathbb{T}^2 . Deducimos que $\overline{\text{Per}(f)} = \mathbb{T}^2$ como queríamos.

Como A es hiperbólica de entradas enteras y determinante 1 tenemos que los valores propios λ, μ de A son irracionales y $\lambda = \mu^{-1}$, $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$. En nuestro caso son positivos y $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Además concluimos que E^s y E^u (los subespacios propios asociados a λ y μ respectivamente) son rectas de pendiente irracional. Por lo tanto $\Pi(E^s)$ y $\Pi(E^u)$ son densas en \mathbb{T}^2 . Sean U, V abiertos cualesquiera en \mathbb{T}^2 . Luego $\Pi(E^s) \cap U \neq \emptyset$ y $\Pi(E^u) \cap V \neq \emptyset$. Sean \tilde{U} y \tilde{V} componentes conexas de $\Pi^{-1}(U)$ y $\Pi^{-1}(V)$ respectivamente tales que $E^s \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ y $E^u \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Se concluye fácilmente que existe n_0 tal que $A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$f^n(U) \cap V \supset \Pi(A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V}) \neq \emptyset, \forall n \geq n_0$$

y f es entonces topológicamente mixing.

Veamos que f es expansivo. Consideremos ϵ_0 tal que si $\|x - y\| < \epsilon_0 \implies \|Ax - Ay\| < 1/4$ y sean \tilde{x}, \tilde{y} dos puntos de \mathbb{T}^2 tal que $\text{dist}(f^n(\tilde{x}), f^n(\tilde{y})) \leq \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Fijemos $x \in \Pi^{-1}(\tilde{x})$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ tomemos $y_n \in \Pi^{-1}(f^n(\tilde{y}))$ tal que $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$. Afirmamos que $y_{n+1} = Ay_n$, $n \in \mathbb{Z}$. En efecto, como $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$ entonces $\|Ay_n - A^{n+1}x\| \leq 1/4$ y como hay un único elemento de $\Pi^{-1}(f^{n+1}(\tilde{y}))$ a distancia $1/4$ de $A^{n+1}x$ concluimos que $Ay_n = y_{n+1}$. Luego $y_n = A^n y_0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\|A^n x - A^n y_0\| \leq \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Por la expansividad de A deducimos $y_0 = x$ y así $\tilde{x} = \tilde{y}$.

Por último observamos que dado $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\Pi(x + E^s)$ y $\Pi(x + E^u)$ son densas en \mathbb{T}^2 . Afirmamos que $W^s(\Pi(x)) = \Pi(x + E^s)$ y $W^u(\Pi(x)) = \Pi(x + E^u)$. En efecto, si $y \in E^s$ entonces $\|A^n x - A^n y\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ y por lo tanto $\text{dist}(f^n(\Pi(x)), f^n(\Pi(y))) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ y esto implica $\Pi(x + E^s) \subset W^s(\Pi(x))$ (lo cual ya implica que es densa). Por otro lado, consideremos ϵ_0 como antes y

sea $\tilde{y} \in \mathbb{T}^2$ tal que $\tilde{y} \in W^s(\Pi(x))$. Existe n_0 tal que $\text{dist}(f^n(\Pi(x)), f^n(\tilde{y})) \leq \epsilon_0$, $n \geq n_0$. Para simplificar supondremos $n_0 = 0$. Sea $y_n \in \Pi^{-1}(f^n(\tilde{y}))$ tal que $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$. Se deduce, razonando como anteriormente, que $y_{n+1} = Ay_n$. Pero entonces $\|A^n y_0 - A^n x\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ y luego $y_0 \in x + E^s$. Esto concluye la demostración de $W^s(\Pi(x)) = \Pi(x + E^s)$. \square

Teorema 1.3.2 (Estabilidad estructural de Anosov lineales). *Sea $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ un Anosov lineal. Existe ϵ tal que si $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ es un difeomorfismo ϵ - C^1 cerca de f entonces g y f son conjugados.*

Demostración. Sea $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ e hiperbólica tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ A$. Sea $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ difeomorfismo ϵ C^1 -cerca de f y sea $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un levantamiento (que es de clase C^1) de g , es decir $g \circ \Pi = \Pi \circ G$. Podemos escribir $G(x) = Ax + p(x)$ donde $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es periódica en \mathbb{Z}^n . Resulta que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x)\| < \infty$ y $\|Dp_x\| < \epsilon$.

Por la estabilidad de $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ver Teorema 1.1.1) concluimos que (si ϵ es suficientemente chico) existe $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $A \circ H = H \circ G$ donde $H(x)$ es el único punto de \mathbb{R}^n que verifica:

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) - G^m(x)\| < \infty.$$

Afirmamos que si $q \in \mathbb{Z}^n$ entonces $H(x+q) = H(x) + q$. En efecto, observamos que para cada n , $G^n = A^n + p_n$ donde p_n es periódica en \mathbb{Z}^n y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x) + q) - G^m(x + q)\| = \\ &= \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) + A^m q - A^m(x + q) - p_m(x + q)\| = \\ &= \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) - G^m(x)\| < \infty \end{aligned}$$

y por unicidad $H(x+q) = H(x) + q$. Por lo tanto podemos definir $h : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ por $h(\Pi(x)) = \Pi(H(x))$. Resulta que h es un homeomorfismo y además:

$$f \circ h \circ \Pi = f \circ \Pi \circ H = \Pi \circ A \circ H = \Pi \circ H \circ G = h \circ \Pi \circ G = h \circ g \circ \Pi$$

es decir, $f \circ h = h \circ g$. \square

1.4. Herradura de Smale y puntos homoclínicos

Vamos a considerar un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de un cuadrado $Q = I \times I$ es como se indica en la figura 1.1, conocido como la

herradura de Smale ([S]).

Tenemos entonces dos bandas horizontales H_0 y H_1 tal que $f(Q) \cap Q = f(H_0) \cup f(H_1) = I_0 \cup I_1$ son dos bandas verticales. Supondremos que $f|_{H_i}, i = 0, 1$ es afín. En particular, las direcciones horizontales y verticales son preservadas bajo $f|_{H_i}$ y segmentos horizontales son contraídos uniformemente y segmentos verticales son expandidos uniformemente.

Podemos observar que

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap H_0) \cup f(f(Q) \cap H_1)$$

son cuatro fajas verticales. En general

$$\bigcap_{j=0}^n f^j(Q)$$

son 2^n fajas verticales y se concluye que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^j(Q) = K_1 \times I$$

donde K_1 es un conjunto de Cantor en I , es decir, los puntos de Q cuya órbita pasada siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas verticales.

De la misma forma se prueba que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^{-j}(Q) = I \times K_2$$

donde K_2 es un conjunto de Cantor, es decir, los puntos de Q cuya órbita futura siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas horizontales.

Así, el conjunto de puntos de Q cuya órbita siempre se mantiene en Q es $\Lambda = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(Q) = K_1 \times K_2$.

Observemos lo siguiente:

- $\bigcap_{j=-m}^m f^j(Q)$ consiste en 4^m rectángulos cuyos diámetros convergen a cero con m .
- Sea R_m cualquiera de estos rectángulos. Entonces para cualquier $-m+1 \leq j \leq m-1$ se verifica que $f^j(R_m) \subset I_0$ o $f^j(R_m) \subset I_1$.
- Dados dos puntos $x \neq y$ de Λ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ no están a la vez en I_0 o I_1 .

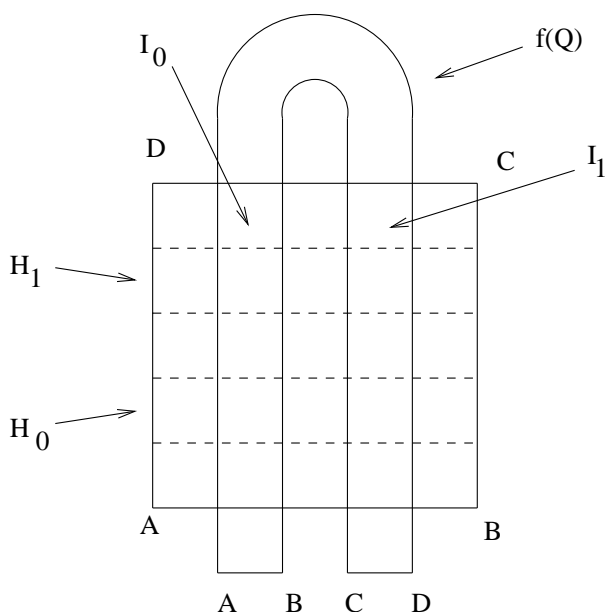


Figura 1.1:

Consideremos $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ el shift (a la izquierda) de Bernoulli (ver sección ??). Consideremos $h : \Lambda \rightarrow \Sigma$ de la siguiente manera:

$$h(x)(n) = i \text{ si } f^n(x) \in I_i, \quad i = 0, 1.$$

Resulta que h es un homeomorfismo tal que $h \circ f = \sigma \circ h$. En efecto:

h continua: Si x, y pertenecen a un mismo rectángulo de $\bigcap_{j=-m-1}^{m+1} f^j(Q)$ entonces $h(x)(j) = h(y)(j)$, $-m \leq j \leq m$.

h inyectiva: se deduce de lo observado anteriormente

h sobreyectiva: Sea $\{x_n\} \in \Sigma$, entonces

$$R_m = \bigcap_{j=-m}^{j=m} f^{-j}(I_{x_j})$$

es un sucesión encajada de rectángulos cuya intersección consiste en un punto x . Se deduce que $h(x) = \{x_n\}$.

De estas propiedades y el hecho que Λ es compacto concluimos que h es un homeomorfismo. Además:

$$h(f(x))(n) = i \Leftrightarrow f^{n+1} \in I_i \Leftrightarrow i = h(x)(n+1)$$

es decir, $h \circ f = \sigma \circ h$. En conclusión hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. *Sea $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$. Entonces Λ es un conjunto de Cantor y $f|_{\Lambda}$ es conjugado al shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ donde $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. En particular:*

1. *Los puntos periódicos son densos en Λ .*
2. *$f|_{\Lambda}$ es transitivo y topológicamente mixing.*
3. *$W^s(x) \cap \Lambda$ y $W^u(x) \cap \Lambda$ son densos en Λ para $x \in \Lambda$.*

Observación 1.4.1. Una construcción similar y un resultado análogo puede realizarse en \mathbb{R}^m con un cubo I^m .

Definición 1.4.1. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico. Un punto $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ diferente de p se llama punto homoclínico. Se dice además que es transversal si la intersección $W^s(p) \cap W^u(p)$ es transversal en x . La órbita de un punto homoclínico (transversal) es llamada órbita homoclínica (transversal).

Situaciones como la herradura vista anteriormente aparecen siempre que tengamos un punto homoclínico transversal:

Teorema 1.4.2 (Birkhoff-Smale). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo, p un punto fijo hiperbólico y x un punto homoclínico transversal. Entonces existe $N > 0$ y un conjunto f^N invariante Λ (que contiene p y x) tal que $f|_{\Lambda}^N$ es conjugado al shift de Bernoulli (de dos símbolos).¹*

¹El conjunto Λ es además un conjunto hiperbólico (ver definición 2.1.1).

Capítulo 2

Difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2 .

Allegro

En este capítulo estudiaremos difeomorfismos de Anosov como ejemplo base de la dinámica hiperbólica. Recordemos que un difeomorfismo de Anosov en el toro es un difeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $T\mathbb{T}^2 = E^s \oplus E^u$ descomposición continua e invariante por Df y existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\|Df^n_{/E^s}\| \leq C\lambda^n; \quad \|Df^{-n}_{/E^u}\| \leq C\lambda^n$$

Por simplicidad asumiremos que $C = 1$. Decimos que E^s es integrable si para todo x existe subvariedad de dimension 1 inmersa J (que también llamaremos curva integral) tal que $x \in J$ y tal que si $y \in J$ entonces $T_y J = E^s(y)$. Decimos que es únicamente integrable si J y W son dos curvas integrales entonces $J \cap W$ es abierto en J y en W . Observar que si J es una curva integral, también lo es $f(J)$. Además si J es un arco compacto de una curva integral, entonces $\ell(f^n(J)) \leq \lambda^n \ell(J)$ donde $\ell(J)$ denota la longitud.

Para cada $x \in \mathbb{T}^2$ tomemos $X^s(x) \in E^s$ y $X^u(x) \in E^u$ vectores unitarios. Podemos tomar estos campos unitarios tangentes de forma que varíen continuamente. Observemos que E^s es (únicamente) integrable si $\dot{x} = X^s(x)$ tiene solución (única).

Teorema 2.0.3. *E^s y E^u son únicamente integrables.*

Observemos que por el Teorema de Peano los campos X^s y X^u son integrables (y por lo tanto E^s y E^u son integrables). Debemos mostrar solamente la unicidad. Y este es un problema de unicidad local.

Para cada $x \in \mathbb{T}^2$ denotaremos por $R_\epsilon(x)$ al conjunto (identificado via el mapa exponencial) $B_\epsilon^s(x) \times B_\epsilon^u(x)$ donde $B_\epsilon^j(x)$ es una bola de radio ϵ en $E^j(x)$, $j = s, u$ centrada en $0 \in T_x \mathbb{T}^2$. Denotaremos por $\partial^s R_\epsilon(x)$ a $\{\pm\epsilon\} \times B_\epsilon^u$. Análogamente $\partial^u R_\epsilon(x)$. Si $y \in R_\epsilon(x)$ denotaremos por $J_\epsilon^s(y)$ a la componente conexa de la curva integral por y de X^s intersección R_ϵ que contiene a y . Y de forma análoga J^u . Los siguientes lemas son consecuencia inmediata de la continuidad e invariancia de E^s y E^u .

Lema 2.0.1. *Para todo ϵ suficientemente chico existe δ tal que si $y \in R_\delta(x)$ entonces $J_\epsilon^s(y) \cap \partial^u R_\epsilon = \emptyset$ y $J_\epsilon^s(y)$ interseca ambas componentes de $\partial^s R_\epsilon$. Análogamente para $J_\epsilon^u(y)$.*

Lema 2.0.2. *Dado ϵ existe δ tal que si $w \in J_\epsilon^u(y)$ y $w, y \in R_\delta(x)$ entonces existe curva integral de E^u por $f(y)$ tal que $f(w) \in J_\epsilon^u(f(y))$ (con respecto a $R_\epsilon(f(x))$.)*

Ahora estamos en condiciones de demostrar la unicidad. Supongamos que no es (localmente) únicamente integrable. Supongamos por absurdo que existen dos curvas integrales locales de E^s por x . Como el conjunto donde ellas coinciden es cerrado, el complemento es abierto y sea z un punto del borde de una componente conexa. Se concluye que por z tenemos dos curvas integrales también. Sea ϵ suficientemente chico y sea δ como en los lemas previos. Sean $J_1 = J_{\epsilon,1}^s(z)$ y $J_2 = J_{\epsilon,2}^s(z)$ las dos curvas integrales. Por lo anterior existen $y \in J_1$, $w \in J_2$, $y \neq w$ tales que $y, w \in R_\delta(z)$ y $w \in J_\epsilon^u(y)$. Luego, como tanto y y w están en curvas integrales de E^s por z concluimos que $f^n(y), f^n(w) \in R_\delta(f^n(z))$ y aplicando el segundo lema inductivamente concluimos que $f^n(w) \in J_\epsilon^u(f^n(y))$. Pero entonces:

$$d(y, w) = d(f^{-n}(f^n(y)), f^{-n}(f^n(w))) \leq \lambda^n \ell(J_\epsilon^u(f^n(y))) \leq \lambda^n 4\epsilon \rightarrow 0$$

y por lo tanto $y = w$ lo cual es una contradicción.

Observación 2.0.2. Un razonamiento análogo al anterior muestra que si $f^n(y) \in R_\delta(f^n(x))$ para todo $n \geq 0$ entonces $y \in J_\delta^s(x)$.

Denotaremos por $W^s(x)$ la curva integral maximal de E^s por x . Análogamente $W^u(x)$. También denotemos por $W_\epsilon^s(x)$ la curva integral de E^s por x de longitud 2ϵ centrada en x . Tenemos entonces el siguiente:

Corolario 2.0.1. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces:*

1. $W^s(x) = \{y : d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0\}$.
2. Si ϵ es suficientemente chico entonces

$$W_\epsilon^s(x) = \{y : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, n \geq 0\}$$

3. $W^s(x) = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(f^n(x)))$.
4. $W_\epsilon^s(x)$ es un subvariedad encajada y W^s es una subvariedad inmersa.

Análogamente para $W^u(x)$.

Otra consecuencia interesante de lo anterior es la estructura de producto local:

Corolario 2.0.2. *Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{T}^2$ existe $h : [-\delta, \delta]^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homeomorfismo sobre su imagen tal que $h(t, \cdot) \subset W_\epsilon^s(h(t, 0))$ y $h(\cdot, s) \subset W_\epsilon^u(h(0, s))$ y $h(0, 0) = x$.*

Demostración. Basta considerar $h(s, t) = J_\epsilon^s(t, 0) \cap J_\epsilon^u(0, s)$ via la identificación hecha anteriormente en $R_\delta(x)$. Esta función h esta bien definida, es continua e inyectiva y (por invariancia del dominio) homeo sobre su imagen. \square

Haciendo abuso de notación, denotaremos este entorno con producto local por $R_\delta(x) \simeq W_\delta^s(x) \times W_\delta^u(x)$. Denotaremos por π^s y π^u las proyecciones a lo largo de la foliación estable e inestable respectivamente en $R_\delta(x)$. Ahora analizaremos las consecuencias dinámicas de lo hecho hasta ahora.

Teorema 2.0.4. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.*

Demostración. Sea $x \in \Omega(f)$ no periódico. Sea ϵ chico y sea $R_\delta(x)$ un entorno de x con estructura de producto local. Sea $\eta > 0$ tal que si $d(y, x) < \eta$ entonces $W_\eta^s(y) \subset R_\delta(x)$. Sea n_0 tal que $\lambda^n \epsilon < \eta$ si $n \geq n_0$. Como $x \in \Omega(f)$ y x no

es periódico entonces existe y tal que $d(x, y) < \eta$ y $d(x, f^n(y)) < \eta$ para algún $n \geq n_0$. Consideremos el siguiente mapa $P : W_\delta^s(x) \rightarrow W_\delta^s(x)$ como sigue:

$$P(z) = \pi^u \circ f^n(W_\epsilon^u(z) \cap W_\epsilon^s(y)).$$

Este mapa es continuo y de un intervalo en si mismo. Luego existe z tal que $P(z) = z$. Esto significa que si $w = W_\epsilon^u(z) \cap W_\epsilon^s(y)$ entonces $f^n(w) \in W_\epsilon^u(w)$. Luego $f^{-n}(W_\epsilon^u(f^n(w))) \subset W_{\lambda^n \epsilon}^u(w) \subset W_\epsilon^u(f^n(w))$. Luego existe $p \in W_\epsilon^u(f^n(w))$ tal que $f^{-n}(p) = p$, es decir $p \in R_\delta(x)$ es periódico. \square

Lema 2.0.3. *Existe $p \in \text{Per}(f)$ tal que $p \neq W^s(p) \cap W^u(p)$.*

Demostración. Si $\Omega(f) \neq \text{Per}(f)$ el resultado se concluye por la existencia de infinitos puntos periódicos en un entorno con estructura de producto local. Basta ver el caso en que $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ (y de hecho el resultado muestra que esto es imposible). Tenemos que hay una cantidad finita de puntos periódicos y tomando una potencia podemos suponer que son todos fijos. Sea p_1 fijo. Si el resultado no es cierto entonces $\overline{W^u(p_1) - W_\epsilon^u(p_1)} \cap R_\delta(p_1) = \emptyset$. Por otro lado $\overline{W^u(p_1) - W_\epsilon^u(p_1)}$ es invariante en el futuro. Luego existe un punto fijo $p_2 \in \overline{W^u(p_1) - W_\epsilon^u(p_1)}$. Por lo tanto $W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$. Razonando inductivamente, y como hay una cantidad finita de puntos fijos (periódicos de f) concluimos que existen p_{i_1}, \dots, p_{i_k} tal que

$$W^u(p_{i_j}) \cap W^s(p_{i_{j+1}}) \neq \emptyset, ; j = 1, \dots, k-1; W^u(p_{i_k}) \cap W^s(p_{i_1}) \neq \emptyset.$$

El resultado se concluye fácilmente. \square

Teorema 2.0.5. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ difeomorfismo de Anosov. Entonces $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$. Además $W^s(x)$ y $W^u(x)$ son densas en \mathbb{T}^2 para cualquier x .*

Demostración. Orientemos la foliación estable según la dirección del campo X^s y lo mismo con la foliación inestable. Sea p como en el lema anterior y que lo supondremos fijo (tomando una potencia de f si es necesario). Sea $R_\delta(p)$ entorno con estructura de producto local de p . Consideremos la primera vez que la variedad estable de p retorna a $R_\delta(p)$. Podemos entonces considerar una curva simple cerrada $\mathcal{C} = [p, q]^s \cup \ell$ donde $[p, q]^s \subset W_K^s(p)$ es un arco dentro de la variedad estable de p y ℓ es un arco que une q con p y contenido en $\mathbb{R}_\delta(p)$. Podemos hacer esto de forma que la foliación inestable sea transversal a \mathcal{C} . Como no hay variedades inestables cerradas concluimos (por Poincaré-Bendixon) que

existe L tal que $W_L^u(x) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ para cualquier x . Pero si $W_L^u(x) \cap \ell$ entonces $W_{L+\epsilon}^u \cap W_{K+\epsilon}^s(p) \neq \emptyset$. Por comodidad, hacemos $L = L + \epsilon$ y $K = K + \epsilon$. Probemos ahora que $W^s(p)$ es densa en \mathbb{T}^2 . Sea U un abierto cualquiera y sea $y \in U$. Sea η tal que $W_\eta^u(y) \subset U$. Consideremos n tal que $\lambda^n L < \eta$. Luego, tomando $x = f^n(y)$ sea $w \in W_L^u(x) \cap W_K^s(p)$. Luego, $f^{-n}(w) \in W_\eta^u(y) \subset U$ y $w \in W^s(p)$.

De forma análoga se prueba que $W^u(p)$ es densa en \mathbb{T}^2 . Por lo tanto $W^s(p) \cap W^u(p)$ es denso en \mathbb{T}^2 y se concluye que $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$.

Probemos ahora que cualquier variedad inestable es densa. Para ello volvamos a considerar la curva \mathcal{C} cerrada transversal a la foliación estable. Tenemos $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ el mapa del primer retorno según la orientación dada por X^u . Luego, P es un homeomorfismo del círculo que preserva orientación. Como $W^u(p)$ es densa en \mathbb{T}^2 concluimos que P tiene una órbita densa. Pero entonces P es conjugado a una rotación irracional y por lo tanto toda órbita es densa. De aquí se concluye que toda hoja inestable es densa en el toro. \square

Teorema 2.0.6. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces:*

1. *Existe $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ Anosov lineal tal que f es conjugado a A .*
2. *f es estructuralmente estable (y Ω -estable.)*

Demostración. Denotemos por $F = A + p$ el levantamiento de f a \mathbb{R}^2 donde $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ y p es \mathbb{Z}^2 periódica. Sean \tilde{W}^s, \tilde{W}^u los levantamientos de la foliación estable e inestable respectivamente. Denotemos por D^s la distancia a lo largo de \tilde{W}^s de dos puntos que estén sobre la misma hoja estable. Veamos que existe $C, E > 0$ tal que $D^s(x, y) \leq Cd(x, y) + E$. Sea \mathcal{C} una curva simple cerrada en \mathbb{T}^2 transversal a la foliación estable. Observemos que $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ es una colección discreta de curvas (que separan \mathbb{R}^2), sea D la mínima distancia entre dos distintas de ellas y sea

$$\rho = \max\{D^s(x, y) : x, y \in \pi^{-1}(\mathcal{C}), (x, y)^s \cap \pi^{-1}(\mathcal{C}) = \emptyset\}.$$

Sean ahora dos puntos x, y que pertenecen a una misma hoja estable, $y \in \tilde{W}^s(x)$. Sea n el número de cortes que tiene $[x, y]^s \cap \pi^{-1}(\mathcal{C})$. Luego

$$D^s(x, y) \leq (n+1)\rho \leq \frac{\rho}{D}(n-1)D + 2\rho \leq \frac{\rho}{D}d(x, y) + 2\rho = Cd(x, y) + E.$$

Obviamente tenemos un resultado análogo para D^u . Probemos ahora que A es hiperbólica. Basta mostrar que A tiene un valor propio de módulo mayor que

uno. Supongamos que no. Sea $\mu < \lambda^{-1}$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| \leq 1$$

Luego, existe n_0 tal que $\|A^n\| \leq \mu^n$. Por otra parte $F^n = A^n + p_n$ con $p_n = \sum_{j=0}^{n-1} A^j p(F^{n-1-j})$. Ahora, si x, y están en una misma hoja inestable, entonces

$$d(F^n(x), F^n(y)) < (K_0 + K_1 \mu^n) d(x, y).$$

Pero por otra parte tenemos que

$$d(F^n(x), F^n(y)) \geq \frac{1}{C} D^u(F^n(x), F^n(y)) - \frac{E}{C} \geq \frac{\lambda^{-n}}{C} D^u(x, y) - \frac{E}{C}.$$

Si n es grande obtenemos una contradicción.

Luego A es hiperbólica y concluimos que F es semiconjugado a A (y f es semiconjugado a A .) Es decir $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua y sobre tal que $H \circ F = A \circ H$ y sabemos que $\|H - Id\| \leq K$ para algún $K > 0$. Para ver que es conjugado basta ver que F tiene constante de expansividad infinita. Observemos que $H(\tilde{W}^s(x)) \subset E_A^s(H(x))$. Además H es inyectiva en cada hoja estable. Concluimos así que $\tilde{W}^s(x)$ esta en una banda de ancho K con respecto a $E_A^s(H(x))$. Análogamente para las hojas inestables. Luego concluimos que hay estructura de producto global y F tiene constante de expansividad infinita. Esto muestra que A y F son conjugados, y por lo tanto A y f son conjugados en \mathbb{T}^2 . Por otra parte, si g esta C^1 cerca de f entonces g es Anosov y también es isotópico a A . Luego g y A son conjugados y por lo tanto g y f son conjugados, es decir, f es estructuralmente estable. □

2.1. Algunos resultados de dinámica hiperbólica

En esta sección enunciaremos (sin demostración) algunos resultados principales de la teoría hiperbólica. El lector interesado podrá consultar por ejemplo [Sh], [KH] y las referencias allí incluidas.

Definición 2.1.1. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Un conjunto compacto e invariante Λ se dice que es hiperbólico si para cada $x \in \Lambda$ existen subespacios $E^s(x) \subset T_x M$ y $E^u(x) \subset T_x M$ que verifican:

1. $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$.

$$2. Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x)) \text{ y } Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x)).$$

3. Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

$$a) \|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E^s(x) \text{ y } n \geq 0.$$

$$b) \|Df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E^u(x) \text{ y } n \geq 0.$$

Como ejemplos básicos de conjuntos hiperbólicos ya vimos los difeomorfismos de Anosov lineales y la herradura de Smale.

Teorema 2.1.1 (Teorema de la variedad estable). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo C^r y Λ un conjunto hiperbólico. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in \Lambda$ se verifica:*

$$1. W_\epsilon^s(x) \text{ es una subvariedad } C^r \text{ tal que } T_x W_\epsilon^s(x) = E^s(x).$$

$$2. W_\epsilon^s(x) \subset W^s(x)$$

3. $W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(f^n(x)))$ y es una subvariedad (inmersa) de clase C^r y varía continuamente (como subvariedades C^r y en subconjuntos compactos) con x .

Obviamente hay un resultado análogo para W^u ya que $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$.

Definición 2.1.2. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Decimos que f es:

- *difeomorfismo de Anosov o globalmente hiperbólico* si M es conjunto hiperbólico.
- *hiperbólico* si el conjunto límite $L(f)$ es hiperbólico.
- *Axioma A* si el conjunto no errante $\Omega(f)$ es hiperbólico y además $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

Un caso muy particular de difeomorfismos Axioma A son los difeomorfismos Morse-Smale:

Definición 2.1.3. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es llamado *Morse-Smale* si

- $\#Per(f) < \infty$ y todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos.
- $\Omega(f) = Per(f)$.
- $W^s(p)$ y $W^u(q)$ se intersecan transversalmente para cualquier $p, q \in Per(f)$.

Teorema 2.1.2. *Se verifican la siguientes implicaciones:*

- *Anosov \implies Axioma A \implies hiperbólico.*
- *Axioma A \iff hiperbólico y $L(f) = \Omega(f)$.*

Teorema 2.1.3 (Descomposición espectral). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo hiperbólico. Entonces $L(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$ donde $\Lambda_i, i = 1, \dots, m$ son conjuntos compactos, f -invariantes, dos a dos disjuntos y transitivos (llamadas piezas básicas). Además, cada $\Lambda_i, i = 1, \dots, m$ se descompone a su vez en una unión disjunta de conjuntos compactos $\Lambda_i = \Lambda_{i1} \cup \dots \cup \Lambda_{in_i}$ tal que $f(\Lambda_{ij}) = \Lambda_{i(j+1)}, j = 1, \dots, n_i - 1, f(\Lambda_{in_i}) = \Lambda_{i1}, f|_{\Lambda_{ij}}$ es topológicamente mixing y $W^s(x)$ es densa en $\Lambda_{ij} \forall x \in \Lambda_{ij}$.*

Observación 2.1.1. El teorema de Descomposición espectral para Axioma A es debido a Smale, la extensión para difeomorfismos hiperbólicos es debida a Newhouse)

Teorema 2.1.4 (Estabilidad local). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto hiperbólico. Entonces existe un entorno C^1 de $f, \mathcal{U}(f)$ y un entorno U de Λ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ existe un conjunto $\Lambda_g \subset U$ hiperbólico para g tal que $f|_{\Lambda}$ y $g|_{\Lambda_g}$ son conjugados.*

Antes de enunciar el siguiente teorema precisamos algunas definiciones.

Definición 2.1.4. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo.

- Decimos que f es C^r -estructuralmente estable si existe un entorno $\mathcal{U}(f) \subset \text{Diff}^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.
- Decimos que f es C^r - Ω -estable si existe un entorno $\mathcal{U}(f) \subset \text{Diff}^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ tal que $h \circ f|_{\Omega(f)} = g|_{\Omega(g)} \circ h$.

Definición 2.1.5. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo Axioma A.

- Decimos que satisface la *condición de transversalidad* si $W^s(x)$ y $W^u(y)$ se intersecan transversalmente para cualquier $x, y \in \Omega(f)$.
- Decimos que f tiene un *ciclo* si existen piezas básicas $\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{k-1}}, \Lambda_{i_k} = \Lambda_{i_1}$ tales que

$$W^u(\Lambda_{i_j}) - \Lambda_{i_j} \cap W^s(\Lambda_{i_{j+1}}) - \Lambda_{i_{j+1}} \neq \emptyset, 1 \leq j \leq k-1.$$

Teorema 2.1.5 (Estabilidad global). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo C^r . Entonces:*

1. *Si f es Anosov $\implies f$ es C^r -estructuralmente estable.*
2. *Si f es Axioma A y satisface la condición de transversalidad $\implies f$ es estructuralmente estable*
3. *Si f es Axioma A y no tiene ciclos $\implies f$ es C^r Ω -estable.*

Uno de los resultados mas sorprendentes de esta teoría es (y que veremos una demostración en un caso particular en el capítulo ??):

Teorema 2.1.6 (Mañé [M1]). *Sea $f : M \rightarrow M$ C^1 estructuralmente estable. Entonces f es Axioma A.*

Capítulo 3

Perturbaciones en la topología C^1 .

Adagio ma non troppo

En este capítulo estudiaremos algunas técnicas de perturbación que utilizaremos en los capítulos siguientes.

3.1. Lema de Franks

El siguiente lema es de uso frecuente en la topología C^1 .

Lema 3.1.1. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo C^1 y sea $\mathcal{U}(f)$ un entorno de f . Entonces existe $\mathcal{U}_0(f) \subset \mathcal{U}(f)$ y $\epsilon > 0$ tal que si $g \in \mathcal{U}_0(f)$, $S \subset M$ es un conjunto finito $S = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ and $L_i, i = 1, \dots, m$ son mapas lineales $L_i : TM_{p_i} \rightarrow TM_{f(p_i)}$ tales que $\|L_i - D_{p_i}g\| \leq \epsilon, i = 1, \dots, m$ entonces existe $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$ tal que $\tilde{g}(p_i) = g(p_i)$ y $D_{p_i}\tilde{g} = L_i$. Además, si U es un entorno de S podemos tomar \tilde{g} tal que $\tilde{g}(x) = g(x)$ para todo $x \in \{p_1, p_2 \dots p_m\} \cup (M \setminus U)$.*

Idea la prueba. La demostración se basa en la siguiente estimación:

Sea $g(x) = Ax + \phi(x)$ con $Dg_0 = A, \phi(0) = 0$ y $D\phi_0 = 0, \phi$ de clase C^1 . Sea L lineal tal que $\|L - A\| < \epsilon$.

Sea δ suficientemente chico tal $\|D\phi_x\| \leq \epsilon$ si $\|x\| \leq \delta$. Consideremos una función “chichón” $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1, \rho(x) = 1$ si $\|x\| \leq \delta/2, \rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq \delta$ y $\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{4}{\delta}$.

Sea $G(x) = g(x) + \rho(x)(Lx - g(x))$. Resulta que $G(x) = Lx$ si $\|x\| \leq \delta/2$ y $G(x) = g(x)$ si $\|x\| > \delta$. Para estimar la distancia C^1 entre G y g basta estudiar cuando $\|x\| < \delta$. Obviamente $\|G(x) - g(x)\| \leq \|L - A\|\|x\| + \|\phi(x)\| < 2\epsilon\|x\|$.

Por otra parte $DG_x - Dg_x = \rho(x)(L - A - D\phi_x) + ((L - A)x - \phi)^T \cdot \nabla \rho(x)$

$$\|DG_x - Dg_x\| \leq |\rho(x)|(\|L - A\| + \|D\phi_x\|) + \epsilon\|\nabla \rho(x)\| \leq 2\epsilon + 2\epsilon\|x\|\frac{4}{\delta} \leq 10\epsilon.$$

El lema se concluye de la estimación anterior usando cartas locales (via mapa exponencial) en cada punto $x \in S$.

□

3.2. Producto de matrices

Consideremos $\mathcal{G}(M) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : \|A\| \leq M\}$. Si $A = A_n \dots A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(M)$ denotemos por

$$B(A, \epsilon) = \{B \in GL_2(\mathbb{R}) : B = A'_n \dots A'_1 \text{ con } \|A'_i - A_i\| < \epsilon, i = 1, \dots, n.\}$$

Lema 3.2.1. *Sea $A = A_n \dots A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(M)$ y tal que A es hiperbólica tipo silla. Sean λ, σ los valores propios de A , $0 < |\lambda| < 1 < |\sigma|$. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que si $A' \in B(A, \epsilon)$ también es hiperbólica. Entonces, existe ϵ_1 tal que $|\lambda| < (\frac{1}{1+\epsilon_1})^n$ y $|\sigma| > (1 + \epsilon_1)^n$.*

Demostración. Sea $\epsilon_1 < \epsilon/M$. Luego si $\|C - I\| < \epsilon_1$ entonces $\|CB - B\| < \epsilon$ si $B \in \mathcal{G}(M)$. Supongamos, por ejemplo, que $(\frac{1}{1+\epsilon_1})^n < |\lambda| < 1$. Sea $\mu = |\lambda|^{1/n}$ y sea $A'_i = \frac{1}{\mu} A_i$ y sea $A' = A'_n \dots A'_1$. Sea v tal que $Av = \lambda v$. Entonces $A'v = \frac{\lambda}{\mu^n} v$ y A' no es hiperbólica. □

El siguiente lema nos dice que si en una matriz hiperbólica el ángulo entre el espacio estable e inestable es muy chico entonces con una pequeña perturbación logramos que no sea hiperbólica.

Lema 3.2.2. *Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & K \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ con $0 < |\lambda| < 1 < \sigma$. Supongamos que $|\sigma - \lambda| > c > 0$. Sea $0 < \epsilon_1 < 1/2$ y sea $\epsilon_0 < \epsilon_1$ tal que $\frac{2\epsilon_0}{c} < \epsilon_1$. Entonces, si $|\frac{\sigma - \lambda}{K}| < \epsilon_0$ existe $\eta, |\eta| < \epsilon_1$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A$ tiene valor propio 1.*

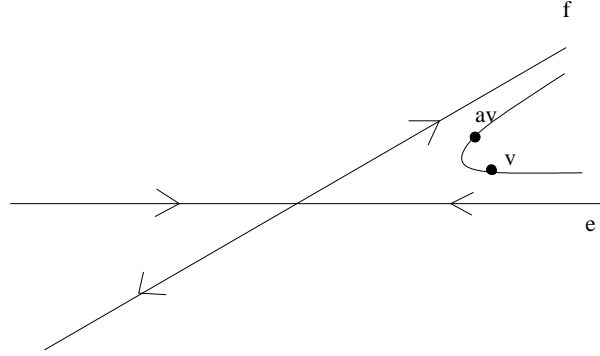


Figura 3.1: Si hay ángulos pequeños, hay puntos cuya imagen está cerca.

Demostración.

$$\text{Det} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A - \text{Id} \right) = (\sigma - 1)(\lambda - 1) - \eta K.$$

Luego, si $\eta = \frac{(\sigma-1)(\lambda-1)}{K}$ se tiene que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A$ tiene valor propio 1. Es inmediato ver que $|\eta| < \epsilon_1$. \square

Corolario 3.2.1. *Sea $\epsilon > 0$. Existe α tal que si $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica con $A_i \in \mathcal{G}(M)$ y se cumple que A' es hiperbólica para cualquier $A' \in B(A, \epsilon)$ entonces se tiene que $\angle(E_A^s, E_A^u) > \alpha$.*

Demostración. Sea ϵ_1 como en el lema 3.2.1 y sea $c = \epsilon_1$. Consideremos ϵ_0 como en el lema 3.2.2. Basta tomar entonces $\tan(\alpha) = \epsilon_0$. Puesto que si el resultado no fuera cierto basta expresar A en la base $E_A^s \oplus (E_A^s)^\perp$ y considerar $A'_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A_n$ y $A'_i = A_i, i = 1, \dots, n-1$. con η como en lema anterior. \square

Sea $A = A_n \dots A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(M)$. Denotaremos por $A(i) = A_i \dots A_1; 1 \leq i \leq n$. Si A es hiperbólica, sea $E_i^s = A(i)E_A^s$ y $E_i^u = A(i)E_A^u$.

Observación 3.2.1. Si $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y también lo es cualquier $A' \in B(A, \epsilon)$ entonces $C = A_m \dots A_1 \cdot A_n \dots A_{m+1}$ y cualquier matriz en $B(C, \epsilon)$ también es hiperbólica. Por lo tanto, en estas condiciones $\angle(E_i^s, E_i^u) > \alpha$.

Lema 3.2.3. *Sea $\epsilon > 0$. Existe $m > 0$ tal que si $A_i \in \mathcal{G}(M), i = 1, \dots, n$ con $n > m$ y $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y A' es hiperbólica para cualquier $A' \in B(A, \epsilon)$ entonces si $v \in E_A^s, w \in E_A^u$ con $\|v\| = \|w\| = 1$ se tiene que*

$$\frac{\|A(m)v\|}{\|A(m)w\|} < \frac{1}{2}.$$

Demostración. Observemos primero que existe α tal que si $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y toda matriz en $B(A, \epsilon)$ es hiperbólica, entonces para cualquier $A' \in B(A, \epsilon/2)$ se tiene que $\angle(E_{A'}^s, E_{A'}^u) > \alpha$.

Por otra parte si $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y $\angle(E_i^s, E_i^u) > \alpha$ para $i = 1, \dots, n$ entonces para cada i podemos definir una nueva métrica \langle, \rangle_i declarando que E_i^s y E_i^u sean ortogonales. Estas métricas son “uniformemente” equivalentes a la métrica original. En particular, dado ϵ_1 existe ϵ_0 tal que $\|C\|_i < \epsilon_0$ entonces $\|C\| < \epsilon_1$. También, dado β_0 existe β_1 tal que si el ángulo entre dos subespacios es menor que β_1 según \langle, \rangle_i entonces el ángulo según la métrica original es menor que β_0 . Tomemos $\beta_0 < \alpha$ y consideremos este β_1 .

Hecha esta observación probemos la existencia de m . Sea $\epsilon_1 = \epsilon/2M$ y sea $\epsilon_0 < \epsilon_1$ como recién observamos. Sea m tal que $2(1 + \epsilon_0)^{m-1} > \frac{1}{\beta_1}$. Afirmamos que este m es el buscado. Razonando por absurdo, supongamos que si A es como en el enunciado, entonces

$$\frac{\|A(m)v\|}{\|A(m)w\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Con respecto a la descomposición $E_i^s \oplus E_i^u$ definamos $A'_i = A_i \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

si $i = 2, \dots, n-1$. Observemos que

$$A_n A'_{n-1} \dots A'_2 A_1 \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \epsilon_0)^{n-2} \lambda \epsilon_0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

ya que no se han modificado los subespacios invariantes. Sea $\eta = \frac{(1 + \epsilon_0)^{n-2} \lambda \epsilon_0}{\sigma}$. Se tiene que $|\eta| < \epsilon_0$ ya que $|\lambda| < (1 + \epsilon_1)^{-n}$. Consideremos ahora

$$A'_1 = A_1 \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'_n = \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n.$$

Tenemos que $A' = A'_n \dots A'_1 \in B(A, \epsilon/2)$. Además $E_{A'}^s = E_A^s$. Por otra parte

$$A' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A'_n A'_{n-1} \dots A'_2 A_1 \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \sigma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $E_{A'}^u = E_A^u$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \angle(A'(m)(E_{A'}^s), A'(m)(E_{A'}^u)) &< \frac{\|A'(m)w\|}{\|A'(m)(v)\|} \\ &\leq \frac{\|A(m)w\|}{(1+\epsilon_0)^{m-1}\|A(m)(v)\|} \leq \frac{1}{2(1+\epsilon_0)^{m-1}} < \beta_1. \end{aligned}$$

Esto es absurdo pues $A' \in B(A, \epsilon/2)$ y por lo tanto los ángulos (según la métrica original) de los subespacios invariantes son $> \alpha$. \square

3.3. Aplicaciones a $Diff^1(M)$.

Sea M una superficie. Denotemos por $\mathcal{F}^1(M)$ al interior del conjunto de los difeomorfismos tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos. Luego, si $f \in \mathcal{F}^1(M)$ entonces existe \mathcal{U} entorno de f tal que si $g \in \mathcal{U}$ y $p \in Per(g)$ entonces p es hiperbólico.

Sea $Per_s(f)$ el conjunto de los puntos periódicos (hiperbólicos) tipo silla.

Teorema 3.3.1. *Sea $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Entonces:*

1. *Existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $p \in Per_s(f)$ es un punto periódico de periodo n entonces*

$$\|Df_{E^s(p)}^n\| < \lambda^n \text{ y } \|Df_{E^u(p)}^{-n}\| < \lambda^n.$$

2. *Existe $m > 0$ tal que si $p \in Per_s(f)$ entonces*

$$\|Df_{E^s(p)}^m\| \cdot \|Df_{E^u(f^m(p))}^{-m}\| < \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^1(M)$ entorno de f . Utilizando el lema de Franks vemos que existe $\epsilon > 0$ tal que si $p \in Per_s(f)$ y $L_i : T_{f^i(p)}M \rightarrow T_{f^{i+1}(p)}M$; $i = 0, \dots, n-1$ donde $n = per(p)$ verifican $\|L_i - Df_{f^i(p)}\| < \epsilon$ entonces existe $g \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{O}(p, g) = \mathcal{O}(p, f)$ y $Dg_{f^i(p)} = L_i$. Identificando cada plano tangente con \mathbb{R}^2 y haciendo $A_i = Df_{f^i(p)}$ tenemos que $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y toda matriz en $B(A, \epsilon)$ también es hiperbólica. De la sección anterior se concluye el resultado. \square

Capítulo 4

Estabilidad Estructural

Rondo

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente:

Teorema 4.0.2. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ difeomorfismo C^1 estructuralmente estable y tal que $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$. Entonces f es un difeomorfismo de Anosov.*

4.1. Descomposición dominada

Definición 4.1.1. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de superficie. Un conjunto invariante Λ tiene *descomposición dominada* si para cada $x \in \Lambda$ existe una descomposición del espacio tangente $T_x M = E(x) \oplus F(x)$ (ambos no triviales) tales que:

1. $Df_x E(x) = E(f(x))$ y $Df_x F(x) = F(f(x))$.

2. Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\|Df^n_{/E(x)}\| \|Df^{-n}_{/F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n, \quad n \geq 0$$

Teorema 4.1.1. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de superficie y sea Λ un conjunto con descomposición dominada. Entonces:*

1. $\bar{\Lambda}$ también tiene descomposición dominada.

2. Los fibrados $E(x)$ y $F(x)$ varían continuamente.

3. El ángulo entre E y F esta acotado uniformemente por debajo.

Demostración. Si $x \in \bar{\Lambda}$ tomamos $x_n \in \Lambda$ tal que $x_n \rightarrow x$ y podemos suponer que $E(x_n)$ y $F(x_n)$ convergen a subespacios $E(x)$ y $F(x)$. Definimos $E(f^n(x)) = Df^n(E(x))$ y análogamente hacemos con $F(f^n(x))$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Se deduce inmediatamente que si $z = f^n(x)$ entonces

$$\|Df^n_{/E(z)}\| \|Df^{-n}_{/F(f^n(z))}\| \leq C\lambda^n, \quad n \geq 0.$$

Por otra parte, si para otra sucesión $y_n \rightarrow x$ tenemos que $E(y_n)$ converge a $\tilde{E} \neq E(x)$ tomemos $v \in \tilde{E}$ con $\|v\| = 1$ y sea $v = v_E + v_F$. Luego

$$\|Df^n_{/\tilde{E}}\| = \|Df^n v\| \geq \|Df^n v_F\| - \|Df^n v_E\| \geq \left(\frac{1\|v_F\|}{\|v_E\|C\lambda^n} - \|v_E\| \right) \|Df^n_{/E}\|$$

es decir $\frac{\|Df^n_{/\tilde{E}}\|}{\|Df^n_{/E}\|} \rightarrow \infty$. Intercambiando los papeles de E y \tilde{E} llegamos a una contradicción. Esto muestra que la extensión está bien definida y además la continuidad de $E(x)$ y $F(x)$. También muestra que los ángulos están uniformemente acotados por debajo (de lo contrario tendríamos que $E(x_n)$ y $F(x_n)$ convergen al mismo subespacio para alguna sucesión x_n). \square

Teorema 4.1.2. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ difeomorfismo C^1 estructuralmente estable y tal que $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$. Entonces existe descomposición dominada en todo \mathbb{T}^2 . Además, existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $p \in \text{Per}(f)$ es un punto periódico de periodo n entonces*

$$\|Df^n_{/E^s(p)}\| < \lambda^n \quad \text{y} \quad \|Df^{-n}_{/E^u(p)}\| < \lambda^n.$$

Demostración. Como f es estructuralmente estable y $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$ tenemos que todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos tipo silla y $f \in \mathcal{F}^1(\mathbb{T}^2)$. Además, por el closing lemma de Pugh ([Pu1],[Pu2]), tenemos que $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f) = \mathbb{T}^2$. Por el teorema 3.3.1 Concluimos el resultado. \square

4.2. Integrabilidad de la descomposición dominada

En esta sección demostraremos el siguiente:

Teorema 4.2.1. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ difeomorfismo tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos y $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^2$ y con descomposición dominada $E \oplus F$ en todo \mathbb{T}^2 . Entonces E y F son únicamente integrables. Además si x, y están en una misma curva integral de E entonces $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Análogamente para curvas integrales de F en el pasado.*

La demostración de este teorema tiene cierta similitud con lo que lo hecho en el capítulo 2. (Una versión mas general puede encontrarse en [Po]). Sin embargo, como en principio no tenemos propiedades de contracción y expansión debemos explotar la relación que hay entre E y F . Como hay una simetría entre estos por la dominancia todo resultado que obtengamos para E en el futuro vale un análogo para F en el pasado.

Sean X^E y X^F campos unitarios tangentes continuos con $X^E \in E, X^F \in F$. Por el teorema de Peano tenemos que E y F son integrables. Debemos mostrar la unicidad.

Para cada $x \in \mathbb{T}^2$ denotaremos por $R_\epsilon(x)$ al conjunto (identificado via el mapa exponencial) $B_\epsilon^{cs}(x) \times B_\epsilon^{cu}(x)$ donde $B_\epsilon^{cs}(x)$ (respect $B_\epsilon^{cu}(x)$) es una bola de radio ϵ en $E(x)$ (respect $F(x)$) centrada en $0 \in T_x \mathbb{T}^2$. Denotaremos por $\partial^{cs} R_\epsilon(x)$ a $\{\pm\epsilon\} \times B_\epsilon^{cu}$. Análogamente $\partial^{cu} R_\epsilon(x)$. Si $y \in R_\epsilon(x)$ denotaremos por $J_\epsilon^{cs}(y)$ a la componente conexas de la curva integral por y de X^E intersección R_ϵ que contiene a y . Y de forma análoga J_ϵ^{cu} . Los siguientes tres lemas son consecuencia inmediata de la continuidad e invariancia de E y F .

Lema 4.2.1. *Para todo ϵ suficientemente chico existe γ tal que si $y \in R_\gamma(x)$ entonces $J_\epsilon^{cs}(y) \cap \partial^{cu} R_\epsilon = \emptyset$ y $J_\epsilon^{cs}(y)$ interseca ambas componentes de $\partial^{cs} R_\epsilon$. Análogamente para $J_\epsilon^{cu}(y)$.*

Lema 4.2.2. *Dado ϵ existe γ tal que si $w \in J_\epsilon^{cu}(y)$ y $w, y \in R_\gamma(x)$ entonces existe curva integral de F por $f(y)$ tal que $f(w) \in J_\epsilon^{cu}(f(y))$ (con respecto a $R_\epsilon(f(x))$.)*

Denotemos por $W_K^{cs}(x)$ una arco de curva integral de E por x de longitud $2K$ centrado en x . De forma análoga $W_K^{cu}(x)$.

Lema 4.2.3. *Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(W_\delta^{cs}(x))$ esta contenido en un curva integral $W_\epsilon^{cs}(f(x))$. Análogamente $f^{-1}(W_\delta^{cu}(x))$ esta contenido en una curva integral $W_\epsilon^{cu}(f^{-1}(x))$.*

Demostremos ahora que bajo ciertas condiciones se cumple la integrabilidad única local.

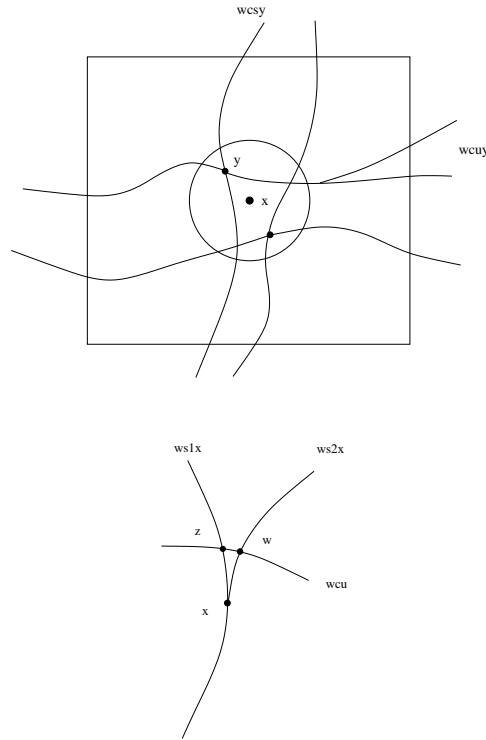


Figura 4.1: Variedades centro estables no únicas.

Lema 4.2.4. *Sea x en \mathbb{T}^2 tal que dado $\gamma > 0$ existe γ_1 tal que si $y \in W_{\gamma_1}^{cs}$ (cualquiera sea esta curva integral local) se tiene que $d(f^n(x), f^n(y)) < \gamma$ para todo $n \geq 0$. Entonces E es únicamente integrable en x .*

Demostración. Supongamos por absurdo que existen dos curvas integrales locales de E por x . Como el conjunto donde ellas coinciden es cerrado, el complemento es abierto y sea y un punto del borde de una componente conexa arbitrariamente cerca de x . Sea ϵ suficientemente chico y sea γ como en los lemas previos. Sean J_1 y J_2 dos E curvas integrales. Por lo anterior existen $z \in J_1, w \in J_2, z \neq w$ tales que $z, w \in R_\gamma(x)$ y $w \in J_\epsilon^{cu}(z)$. Podemos suponer además que $z \in W_{\gamma_1}^{cs}(x)$ así como también w . Luego, concluimos que $f^n(z), f^n(w) \in R_\gamma(f^n(x))$ y aplicando el segundo lema inductivamente concluimos que $f^n(w) \in J_\epsilon^{cu}(f^n(z))$.

Sea $\tilde{C} = \tilde{C}(\epsilon)$ de forma tal que si $y \in W_{loc}^{cs(u)}(z)$ entonces $\tilde{C}^{-1}d_{cs(u)}(y, z) <$

$d(y, z) < \tilde{C}d_{cs(u)}(y, z)$. Donde $d_{cs(u)}$ denota la longitud del arco de variedad centro estable (inestable) que une y con z .

Se puede considerar δ y γ de forma tal que si $d(u, v) < \gamma$ entonces

$$\|Df|_{E(u)}\| < (1 + \delta)\|Df|_{E(v)}\| \quad \|Df^{-1}|_{F(u)}\| < (1 + \delta)\|Df^{-1}|_{F(v)}\|$$

y además $(1 + \delta)^2\lambda < 1$, donde λ es la constante de dominación.

Esto lleva a un absurdo pues:

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \leq \tilde{C}d_{cu}(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \leq \\ &\leq \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| d(f^n(z), f^n(w)) \leq \\ &\leq \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| (d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n(x), f^n(w))) \leq \\ &\leq \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^n|_{E(x)}\| (d(x, z) + d(x, w)) \leq \\ &\leq \tilde{C}^4(1 + \delta)^{2n} C\lambda^n (d(x, z) + d(x, w)) = \tilde{C}^4 C (d(x, z) + d(x, w)) ((1 + \delta)^2\lambda)^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Lo cual resulta absurdo pues $z \neq w$. □

Lema 4.2.5. *Sea $f : M^2 \rightarrow M^2$ un difeomorfismo que admite descomposición dominada $TM = E \oplus F$. Entonces, dado $\rho < 1$ existe ϵ tal que si para $x \in M$ se cumple que $\|Df^n|_{E(x)}\| < C\rho^n$ entonces si $y \in W_\epsilon^{cs}$ se cumple que $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ y además tiende a cero.*

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\|Df^n|_{E(x)}\| < \rho^n$.

Sea δ tal que $(1 + \delta)\rho < 1$, se puede considerar ϵ_1 de forma tal que si $d(z, w) < \epsilon_1$ entonces

$$\|Df|_{E(z)}\| < (1 + \delta)\|Df|_{E(w)}\|$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $f(W_\epsilon^{cs}(z)) \subset W_{\epsilon_1}^{cs}(f(z))$ para cualquier z . Sea x como en el lema. Entonces $f(W_\epsilon^{cs}(x)) \subset W_{\epsilon_1}^{cs}(f(x))$. Por otra parte $\ell(f(W_\epsilon^{cs}(x))) < (1 + \delta)\rho\epsilon < \epsilon$. Así $f(W_\epsilon^{cs}(x)) \subset W_\epsilon^{cs}(f(x))$. Inductivamente se prueba que $f^n(W_\epsilon^{cs}(x)) \subset W_{\epsilon_1}^{cs}(f^n(x))$ y que $\ell(f^n(W_\epsilon^{cs}(x))) < ((1 + \delta)\rho)^n \epsilon < \epsilon$ y se concluye el resultado. \square

Corolario 4.2.1. *Sea $p \in \text{Per}(f)$ entonces $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son curvas integrales de E y F respectivamente.*

Para concluir el teorema entonces basta probar que estamos en las condiciones del lema anterior lo que haremos a seguir. Es fácil ver que es suficiente probar que para cualquier $x \in \mathbb{T}^2$ y para cualquier $\epsilon > 0$ tenemos que $\ell(f^{-n}(W_\epsilon^{cs}(x))) \rightarrow \infty$. Consideremos entonces $R_\epsilon(x)$ como antes. Como los puntos periódicos son densos tomemos p periódico tal que $p \in R_\gamma(x)$. Como $W^u(p)$ es una curva integral (y de longitud infinita) de F tenemos que $W^u(p) \cap W_\epsilon^{cs}(x) \neq \emptyset$. y esta intersección es transversal. Luego, por aplicación directa del teorema de Hartman (o si se prefiere el λ -lema) concluimos que $\ell(f^{-n}(W_\epsilon^{cs}(x))) \rightarrow \infty$.

Observación 4.2.1. Como consecuencia del teorema de esta sección tenemos estructura de producto local como en el capítulo 2.

4.3. Prueba del Teorema 4.0.2

Recordemos que f tiene descomposición dominada $E \oplus F$ en todo \mathbb{T}^2 y que existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $p \in \text{Per}(f)$ es un punto periódico de periodo n entonces

$$\|Df^n_{/E^s(p)}\| < \lambda^n \text{ y } \|Df^{-n}_{/E^u(p)}\| < \lambda^n.$$

Queremos probar que Df contrae exponencialmente a E y que Df^{-1} contrae exponencialmente a F .

Sea Λ un conjunto compacto invariante. Decimos que E es contraído exponencialmente en Λ si existe $C > 0$ y $0 < \sigma < 1$ tal que $\|Df^n_{/E(x)}\| \leq C\sigma^n$ para $n \geq 0$ y $x \in \Lambda$. Queremos probar que E es contraído exponencialmente en \mathbb{T}^2 . Supongamos por absurdo que E no es contraído exponencialmente en \mathbb{T}^2 . Sea \mathcal{F} la familia de subconjuntos compactos invariantes Λ tal que E no es contraído exponencialmente en Λ . Ordenamos \mathcal{F} por inclusion. Sea $\{\Lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una cadena totalmente ordenada. Entonces $A = \bigcap_\gamma \Lambda_\gamma$ es un compacto invariante y

E no es contraído en A (de lo contrario E sería contraído exponencialmente en el maximal invariante de un entorno compacto de A el cual incluiría algún Λ_γ .) Luego \mathcal{F} tiene un conjunto maximal Λ_0 . Es decir, E es contraído exponencialmente en cualquier subconjunto compacto propio de Λ_0 pero E no es contraído en Λ_0 .

Probemos que existe $x \in \Lambda_0$ tal que $\|Df_{/E(x)}^n\| \geq \frac{1}{2}$ para cualquier $n \geq 0$. Si para todo x existe n_x tal que $\|Df_{/E(x)}^{n_x}\| < 1/2$ por compacidad podríamos tomar tal $n_x < m$ para algún m . Pero de aquí se prueba que E es contraído exponencialmente en Λ_0 . Esto prueba la existencia del x antes mencionado. Probemos que este x es recurrente. De hecho vale que $\omega(x) = \Lambda_0$. Razonando por absurdo, si $\omega(x) \subsetneq \Lambda_0$ concluimos que E es contraído exponencialmente en $\omega(x)$ y por lo tanto $\|Df_{/E(x)}^n\| \rightarrow 0$ lo cual es absurdo.

Sea γ tal que $1 - \gamma > \lambda$ y sea n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\frac{1}{2}(1 - \gamma)^n > \lambda^n$. Sea $\eta > 0$ tal que si $d(z, y) < \eta$ entonces

$$1 - \gamma \leq \frac{\|Df_{/E(z)}\|}{\|Df_{/E(y)}\|}.$$

Sea $R_\delta(x)$ un entorno con estructura de producto local tal que si $z \in R_\delta$ y $J^s(z)$ es la componente conexa de $W^{cs}(z)$ que contiene a z entonces $\ell(f^n(J^s(z))) < \eta/2$ si $n \geq 0$. Análogamente para $J^u(z)$ en el pasado. Sea ahora $n \geq n_0$ tal que

- $f^n(x) \in R_\delta(x)$.
- $f^n(J^s(x)) \subset R_\delta(x)$.
- $f^{-n}(J^u(f^n(x))) \subset R_\delta(x)$.

Sea Q el subrectángulo $J^s(x) \times f^{-n}(J^u(f^n(x)))$ en R_δ y $Q' = f^n(J^s(x)) \times J^u(f^n(x))$. Luego $f^n(Q) = Q'$ y tenemos que existe $p \in Q \cap Q'$ punto periódico. Se tiene que n es el periodo de p o un múltiplo del mismo. Por otro lado tenemos que $d(f^j(p), f^j(x)) < \eta$ para $j = 0, 1, \dots, n$. Por lo tanto

$$\lambda^n > \|Df_{/E(p)}^n\| = \frac{\|Df_{/E(p)}^n\|}{\|Df_{/E(x)}^n\|} \|Df_{/E(x)}^n\| \geq \frac{(1 - \gamma)^n}{2} > \lambda^n$$

y llegamos a una contradicción. Esto concluye que E es contraído en \mathbb{T}^2 . De forma similar se prueba que F es contraído exponencialmente en el pasado y la demostración del teorema esta terminada..

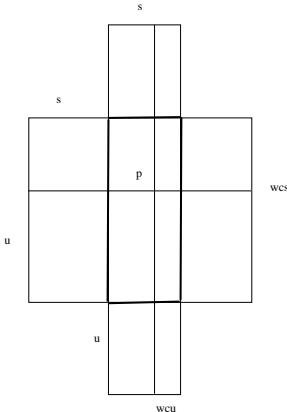


Figura 4.2: Puntos periódicos en el corte de rectángulos

Bibliografía

- [HPS] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, Invariant manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).
- [KH] Katok, A., Hasselblatt, B.; *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems* Cambridge Univ. Press, 1995.
- [M1] R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **66** (1988) 161-210.
- [M2] R. Mañé, An ergodic closing lemma, *Ann. of Math.* **116** (1982), 503-540.
- [N] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50** (1979), 101-151.
- [NS] Nemytskii, V.; Stepanov, V.; *Qualitative Theory of differential equations*, Princeton University Press, 1960.
- [P] J. Palis, A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors, *Astérisque* **261** (2000), 339-351.
- [Pl] V. A. Pliss, On a conjecture due to Smale, *Diff. Uravnenija*, **8** (1972), 268-282.
- [Po] R. Potrie, Transitividad robusta en superficies. Monografía de Licenciatura, Cmat-Fcien-Udelar.
- [PS1] E. R. Pujals, M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of math* **151** (2000), 961-1023.
- [PS2] E. R. Pujals, M. Sambarino, On homoclinic tangencies, hyperbolicity, creation of homoclinic orbits and variation of entropy, *Nonlinearity* **13** (2000) 921-926.

- [PT] J. Palis, F. Takens, Hyperbolicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge Univ. Press*, 1993.
- [Pu1] C. Pugh, The closing lemma, *Amer. J. Math.* **89** (1967) 956-1009.
- [Pu2] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1010-1021.
- [S] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.
- [Sch] A. J. Schwartz, A generalization of a Poincaré-Bendixon Theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 453-458.
- [Sh] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag*, 1987.