

Fractales: una introducción

Sergio Plaza

Departamento de Matemática y C.C.

Universidad de Santiago de Chile

Casilla 307-Correo2.

Santiago, Chile

e-mail: sergio.plaza@usach.cl

homepage: <http://fermat.usach.cl/{dinamicos/SPlaza.html>

June 29, 2011

Contenidos

1	Ideas Básicas	3
1.1	Procesos Iterativos	3
1.2	Curva de Koch: construcción geométrica	4
1.2.1	Cálculo del área acotada por el copo de nieve de Koch	5
1.3	Conjunto de Cantor	7
1.4	Triángulo de Sierpinski	7
1.4.1	Área del triángulo de Sierpinski	8
1.5	Alfombra de Sierpinski	8
2	Iteración de funciones	9
2.1	Modelo lineal	10
2.2	Iteraciones de la función $x \rightarrow \sqrt{x}$	11
2.2.1	Método de Newton	12
3	Representaciones Numéricas	14
3.0.2	Representación decimal	14
3.0.3	Representación en base $p > 1$	16
3.0.4	Representación triádica ($p = 3$)	16
3.0.5	Conjunto de Cantor y representación en base 3	17
3.0.6	Representación binaria ($p = 2$)	19
3.1	Triángulo de Sierpinski y representación en base 2	19
4	Sistemas de funciones lineales iterados en la recta y en el plano	21
4.1	Sistemas de funciones iterados en la recta	21
4.1.1	Iteraciones de funciones afines en la recta	21
4.2	Sistemas iterados de funciones lineales en el plano	22
4.2.1	Traslaciones, reflexiones y rotaciones	23
4.2.2	Traslaciones	23
4.2.3	Reflexiones	23
4.2.4	Rotaciones alrededor del origen	24
4.2.5	Expansiones y contracciones al origen	25
4.2.6	Similitudes	25
4.3	Sistema de Funciones Iteradas	25
4.3.1	Ejemplos	26
4.4	Curvas Fractales	36
4.4.1	Nota Histórica	36
4.4.2	Función de Weierstrass y función de Riemann	37
4.4.3	Curvas de Takagi	38
4.4.4	Curva de Levy	39
4.4.5	Curvas de Peano y de Hilbert	40

Introducción

Primero remarquemos que el estudio de los fractales no es algo privativo o exclusivo de las Matemáticas. El estudio y origen de distintos fenómenos que se explican mediante modelos fractales corresponde determinarlos a las disciplinas científicas donde se planteen. También debemos señalar el potencial interdisciplinar de estos objetos, como elementos que pueden constituir el eje sobre el cual distintas disciplinas pueden trabajar coordinadamente. Los fractales desde su primera formulación tuvieron una vocación práctica de servir como modelos para explicar la naturaleza. El propio Benoit Mandelbrot tuvo el mérito de intuir la potencia de los fractales para construir modelos que expliquen la realidad, esto lo hizo desde su primera formulación y desde sus primeros trabajos que, con un notable afán práctico y divulgador. En este sentido es indispensable leer los trabajos de Mandelbrot (1975) y (1977), así como el de Feder (1988). Otra cosa que hay que señalar es que por su novedad este dominio de las matemáticas está lleno de intuiciones muy acertadas, pero también de ambigüedades **¿Qué criterios se pueden seguir para decir que un objeto real tiene estructura de fractal? Es claro que un criterio puede ser el de la simple percepción visual o intuición.** A la vista de algo está claro que alguien exclamará esto es un fractal. Esto ya constituye un criterio bueno y que vale para trabajar con nuestros alumnos. A continuación podemos investigar algo más, el alumno nos puede decir que lo mismo que se ve a gran escala se ve a pequeña escala, lo cual nos da una idea de recursión o de autosimilitud. O que se parece a un árbol, lo cual nos da ya idea de ramificación. Este lenguaje que es vago e impreciso no está muy lejos, aunque parezca extraño, del significado científico que se atribuye a un objeto real o natural cuando se dice que es un fractal. Por ejemplo **¿qué se quiere decir cuando se dice que una zona costera es un fractal?** Desde luego no quiere decirse que haya una curva y una fórmula matemática que se ajuste de forma precisa al perfil del litoral. Lo que quiere decirse es que pueden definirse un modelo matemático fractal, que se ajusta con unas cotas máxima y mínima de error, cotas que se pueden determinar de forma precisa, al perfil de la costa. Así veremos no sólo que se han ajustado curvas fractales a ciertas zonas de costa, Gran Bretaña, Noruega, y a fronteras como la de España y Portugal, sino que además como veremos coinciden con una variante de la curva de Koch y que también se ha determinado su dimensión fractal. **La cuestión que se plantea a continuación es si un objeto con estas características, un trozo de costa, la red arterial,** son realmente fractales, o dicho de otra forma **¿existen realmente fractales en la naturaleza?** Esta pregunta, que es legítimo hacerla, e incluso responderla negativamente, es decir negando la existencia de los fractales en la naturaleza, es la misma que se hace cuando se pregunta si existen superficies planas o líneas rectas en la naturaleza, o si existen esferas. Sería como suponer que en la naturaleza no existen esferas por que la Tierra, u otros planetas, no se ajustan con precisión a lo que es una esfera ideal tal como se define en Matemáticas.

En la naturaleza los objetos fractales suelen aparecer de varias formas. Una de ellas es en una situación de frontera, y aquí incluimos todos los casos en que entran en contacto dos medios humanos, naturales, físicos, químicos, etc. o dos superficies diferentes: frontera entre países, riberas de los ríos, litoral, nubes, ..., otra situación es la de árbol. Es decir aquellos casos en que se produce una ramificación con autosimilitud: árboles, arbustos, y plantas, tejidos arteriales, cuencas fluviales con sistemas de río, afluentes, barrancos, riachuelos, etc. redes capilares, redes pulmonares, ...

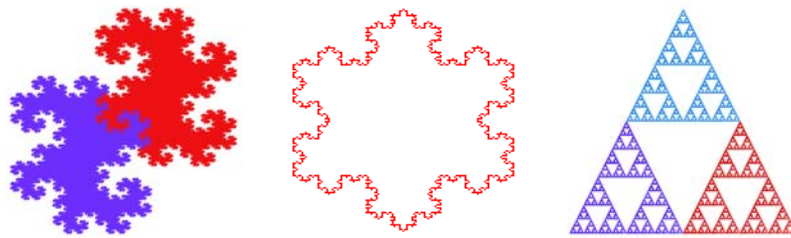
Existen razones puramente estéticas, o de la curiosidad, que producen la observación y el estudio analítico de estas curvas, y que estimula la formulación de modelos matemáticos o geométricos, que permitan comprender fenómenos científicos o tecnológicos de cierta profundidad. La introducción del computador, con su inmensa capacidad de iteración rápida e interactiva, con la ayuda de algoritmos y procedimientos relativamente sencillos, es el instrumento ideal para el trabajo con este tipo de objetos matemáticos. Por su capacidad de interacción con el usuario, el computador permite un ajuste rápido entre las instrucciones establecidas en términos de procedimientos espaciales y la formulación definitiva de estos procedimientos como algoritmos, mediante contrastes

sucesivos con variaciones en los programas y en las ejecuciones. Hasta ahora la variación de las condiciones en los modelos sólo podían ser seguidos mediante experimentos o simulaciones mentales reservados a aquellos alumnos más competentes para la retención de datos y para llevar a cabo representaciones mentales. A esta capacidad para la iteración hay que añadir la capacidad gráfica de los entornos gráficos que permiten con su poder de resolución y rapidez de ejecución, seguir los procesos iterativos, y contrastar la variación en las representaciones con variaciones en los parámetros.

Capítulo 1

Ideas Básicas

¿Que es un Fractal?, ¿son las figuras siguientes Fractales?, ¿qué razón tenemos para llamarlas Fractales?



¿Cómo generamos este tipo de figuras?

En general la generación de imágenes como las anteriores es a través de procesos iterativos. Noción que pasamos a desarrollar ahora.

1.1 Procesos Iterativos

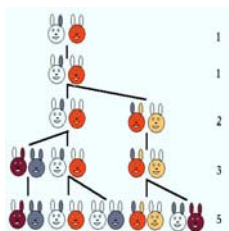
La idea fundamental de un proceso iterativo consiste en lo siguiente: dado uno o varios valores iniciales, se introducen estos en una o varias fórmulas, *transformación iterativa*, la cual podemos imaginar como una máquina que transforma un valor inicial o varios valores iniciales en otro u otros valores, *resultado*, el cual pasa a ser considerado como parte de nuevos valores iniciales o de un nuevo valor inicial para el proceso iterativo. Un valor inicial puede ser un ente geométrico, por ejemplo un punto o un conjunto de puntos o una figura. La transformación que se aplica puede venir expresada por fórmulas o por una serie de pasos a ejecutar en cada etapa de la iteración. Un ejemplo sencillo de un proceso iterativo es dado por la sucesión de Fibonacci, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cuyos primeros valores son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

la cual se obtiene considerando los valores iniciales $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ y para $n \geq 1$ la fórmula iterativa $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Esta sucesión tiene relación con un problema clásico sobre reproducción de conejos

“Se pone en un campo cerrado un conejo y una coneja. Estos están fértiles al mes de vida. Suponga que se demora un mes en nacer otra pareja de un conejo y una coneja. Suponiendo que los conejos no mueren, y que cada vez engendran un macho y una hembra con las mismas condiciones que la pareja inicial ¿Cuántos pares de conejos habrá en 6 meses, en un año, en dos años ...?”



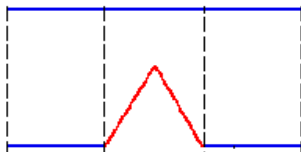
El modelo Fibonacci para la reproducción de los conejos, es quizá, uno de los primeros modelos matemáticos para representar realidades. Aunque como el lector comprenderá no es un problema muy serio.

El proceso iterativo que acabamos de ver, viene expresado por una fórmula. Un ejemplo de un proceso iterativo que viene expresado como una serie de pasos a ejecutar, lo ilustramos en la próxima sección.

1.2 Curva de Koch: construcción geométrica

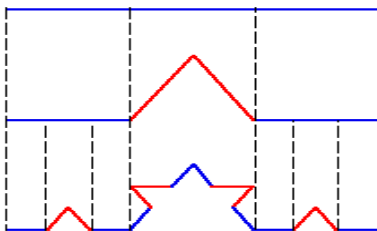
El nombre de esta curva es en honor a su creador, el matemático sueco Niel Helge von Koch (25/01/1870–11/03/1924), que publicó en 1904 el trabajo “*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*”.

1. Considere un segmento de recta, el cual consideramos de longitud 1 (esto no constituye ninguna restricción.)
2. Reemplace el segmento inicial por cuatro segmentos de recta cada uno de longitud $\frac{1}{3} \times (\text{longitud del segmento anterior})$. Formando la figura siguiente



Obtenemos así una poligonal ℓ_1 (de la base de la figura, en azul los intervalos que permanecen y en rojo los nuevos segmentos agregados) formada por cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$, por lo tanto su longitud ℓ_1 es $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

3. Aplicamos el proceso de reemplazar cada segmento de la poligonal ℓ_1 obtenida en la etapa anterior por cuatro segmentos cada uno de longitud $\frac{1}{3} \times (\text{longitud del segmento considerado})$. Con esto, obtenemos la figura siguiente



La nueva poligonal ℓ_2 , en la cual cada segmento tiene longitud $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, hay 16 de tales segmentos, luego la longitud de la poligonal ℓ_2 es igual a $\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.

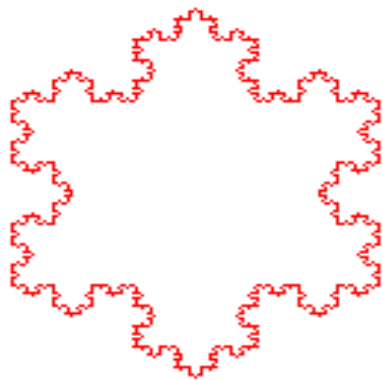
4. Repetimos el proceso de reemplazar cada segmento de recta de la poligonal por cuatro segmentos, como se hizo en el paso 2. Obtenemos así una poligonal ℓ_3 que consta de 64 segmentos, cada uno de longitud $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$, por lo tanto la longitud de la poligonal ℓ_3 es $\frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$.
5. Este proceso puede repetirse indefinidamente, obteniendo una “curva” de longitud infinita, pues en la etapa n la poligonal obtenida consta de 4^n segmentos, cada uno de longitud $\frac{1}{3^n}$. Por lo tanto la longitud de ℓ_n es $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ que se hace grande cuando n crece. La curva límite es llamada *curva de Koch*.

Como puede observarse desde la construcción de la curva de Koch, en cada etapa agregamos puntos esquinas (aquellos que forman el vértice de dos segmentos). La curva final tendrá un punto esquina en cada punto, esto no es fácil de imaginar, pero de hecho así ocurre.



Curva de von Koch

La construcción de reemplazar cada segmento por otros cuatro, cada uno de longitud $\frac{1}{3} \times (\text{longitud del segmento considerando en la etapa anterior})$ puede aplicarse, por ejemplo, a los lados del triángulo equilátero de lado 1. Obteniendo, una figura como se muestra abajo

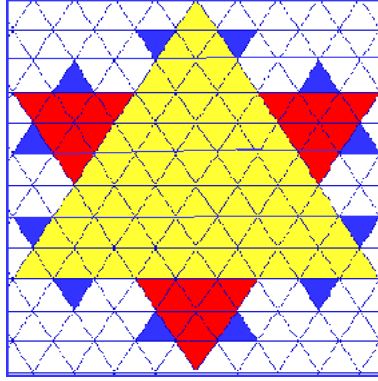


Curva de von Koch cerrada

Es fácil ver que la longitud de la curva límite crece indefinidamente, notemos que la curva límite acota una región de área finita en el plano. Esta curva límite es llamada *copo de nieve de Koch*. Ella hiere nuestra intuición, pues es una *curva de longitud infinita que delimita una región de área finita en el plano*. Una manera sencilla de ver esto, es mostrar que la curva de Koch está contenida en la región delimitada por el círculo circunscrito al triángulo equilátero con el cual comenzamos la construcción. A seguir calculamos en forma explícita el área que acota el copo de nieve de Koch.

1.2.1 Cálculo del área acotada por el copo de nieve de Koch

Ahora calcularemos el área delimitada por el copo de nieve de Koch, la siguiente figura nos muestra hasta la etapa 2 los triángulos que vamos agregando,



Inicialmente tenemos un triángulo equilátero de lado $\ell_0 = 1$, por lo tanto su área es igual a $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. En la primera etapa de la construcción agregamos tres pequeños triángulos equiláteros, cada uno de lado $\ell_1 = \frac{1}{3}$, luego el área de la figura resultante en la primera etapa es $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. En la etapa 2, a lo anterior agregamos 12 triángulos, cada uno con lado de longitud $\ell_2 = \frac{1}{9}$, luego el área de la figura resultante es $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + 12 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{81} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$. En la etapa 3, al área que ya tenemos le agregamos 48 triángulos equiláteros, cada uno de lado $\ell_3 = \frac{1}{27}$, por tanto el área de la figura en la etapa 3 es $A_3 = \frac{10\sqrt{3}}{27} + 48 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{27^2} = \frac{282\sqrt{3}}{27^2}$. Continuando de esta manera, podemos postular que el área delimitada por la curva de Koch cerrada es $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. De hecho, tenemos

$$\begin{aligned} A_1 - A_0 &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \\ A_2 - A_1 &= \frac{10\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^1 \\ A_3 - A_2 &= \frac{282\sqrt{3}}{27^2} - \frac{10\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \\ &\vdots \\ A_n - A_{n-1} &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora, como $A_n - A_0 = (A_n - A_{n-1}) + (A_{n-1} - A_{n-2}) + \dots + (A_3 - A_2) + (A_2 - A_1) + (A_1 - A_0)$, nos queda

$$A_n - A_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{4}{9}}, \quad \text{de donde} \quad A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{\frac{5}{9}}.$$

Como $\left(\frac{4}{9}\right)^k$ tiende a 0 cuando k crece indefinidamente, se sigue que A_n se aproxima al valor $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ como deseábamos probar.

Observación. Si en la construcción del copo de nieve de Koch comenzamos con un triángulo equilátero de lado a , no hay nada substancialmente distinto a lo expuesto anteriormente.

1.3 Conjunto de Cantor

Este conjunto es utilizado frecuentemente en matemática para construir ejemplos y su nombre lo debe a su creador George Cantor (03/03/1845-06/01/1918).

Comenzamos la construcción con un segmento de recta, digamos de longitud 1. Dividimos el segmento inicial en 3 segmentos cada uno de longitud $\frac{1}{3}$, y eliminamos el segmento central, obteniendo dos segmentos cada uno de longitud $\frac{1}{3}$. Enseguida dividimos cada segmento resultante en la etapa anterior en 3 segmentos de igual longitud $\frac{1}{3} \times (\text{longitud del segmento al cual le estamos aplicando el proceso})$, y eliminamos los segmentos centrales, obtenemos 4 segmentos cada uno de longitud $\frac{1}{9}$. Repetimos el proceso de división y eliminación anterior a cada segmento resultante en la etapa anterior, y continuamos el proceso indefinidamente. El resultado final es un conjunto C , llamado *conjunto de Cantor*, el cual es no vacío y contiene tantos puntos como la recta real.

Debido a su construcción el conjunto de Cantor es autosimilar, esto quiere decir que si tomamos pequeñas partes del conjunto de Cantor, y le un zoom, por muy chica que sea esta, vemos de nuevo el conjunto de Cantor. Si en cada etapa de la construcción del conjunto de Cantor, medimos la longitud del conjunto resultante, obtenemos lo siguiente:

Etapa	0	1	2	3	...	n
Longitud	1	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3})^2$	$(\frac{2}{3})^3$...	$(\frac{2}{3})^n$

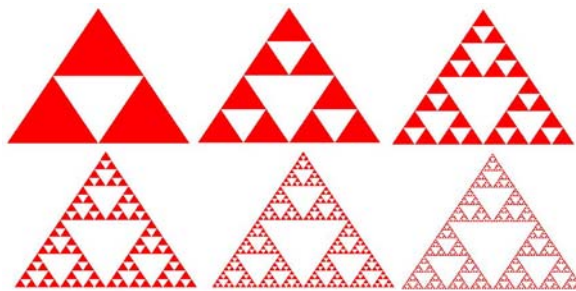
Luego, el conjunto de Cantor tiene longitud 0.

Afirmación. *El conjunto de Cantor tiene tantos puntos como el segmento inicial.*

Para ver que C tiene tantos puntos como el segmento inicial, escribimos los números $0 \leq x \leq 1$ en base en el sistema binario, es decir, escribamos $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j}$, donde $a_j \in \{0, 1\}$. Por otra parte, escribiendo los números reales entre 0 y 1 en base 3, es decir, $x = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 3^{-j}$, donde $d_j \in \{0, 1, 2\}$. Veremos más adelante que un número $0 \leq x \leq 1$ pertenece al conjunto de Cantor si éste no contiene al dígito 1 en su representación en base 3, en otras palabras, x se escribe en la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 3^{-j}$, con $d_j \in \{0, 2\}$. Definamos la función $\Phi : \{x : 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow C$ por $\Phi(\sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j}) = \sum_{j=1}^{\infty} (2a_j) 3^{-j}$. Es fácil verificar que Φ es una biyección, por lo tanto se tiene lo pedido. Lo que acabamos de demostrar no es intuitivo ni fácil de aceptar.

1.4 Triángulo de Sierpinski

El nombre de esta figura fractal lo debe a su creador el matemático polaco Włocław Sierpiński (14/03/1882-21/10/1969). La construcción clásica de esta figura fractal es como sigue. Consideramos una región triangular, la cual para simplificar suponemos delimitada por el triángulo equilátero de lado 1. Dividimos la región en cuatro regiones menores de igual área, esto se logra uniendo los puntos medios de los lados del triángulo original.



1.4.1 Área del triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski tiene área cero. Para mostrar esto calculamos el área retirada en la construcción del triángulo de Sierpinski.

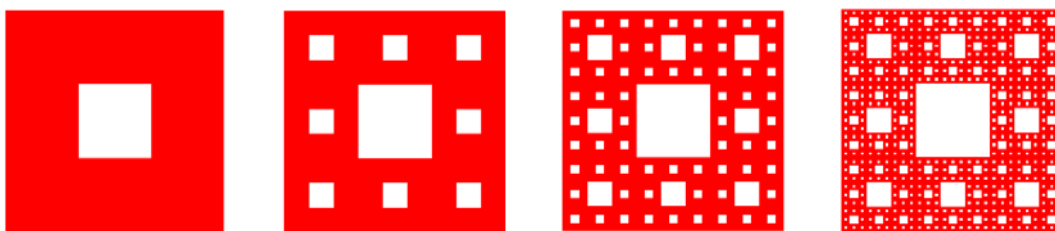
En la etapa inicial tenemos un triángulo equilátero de lado 1, luego su área es $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. En la primera etapa retiramos el triángulo equilátero central de lado $\ell_1 = \frac{1}{2}$, y nos quedan tres triángulos equiláteros de lado $\ell_1 = \frac{1}{2}$ por lo tanto el área de la figura que resulta es $A_1 = 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. En la segunda etapa, de cada uno de los triángulos restantes retiramos un triángulo equilátero de lado $\ell_2 = \frac{1}{4}$ y nos quedan 9 triángulos equiláteros cada uno de lado $\ell_2 = \frac{1}{4}$, luego el área de la figura es $A_2 = 9 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$, y continuando de este modo, en la etapa n de la construcción, el área de la figura que resulta es $A_n = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ahora, como $\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ tiende a 0 cuando n crece indefinidamente, concluimos que el triángulo de Sierpinski tiene área 0

El triángulo de Sierpinski, al igual que la curva de Koch y al conjunto de Cantor, es autosimilar.

Estas tres figuras, constituyen la trilogía de los más clásicos ejemplos de las figuras llamadas fractales.

1.5 Alfombra de Sierpinski

La construcción de la *alfombra de Sierpinski* es similar a la construcción del triángulo de Sierpinski. En la secuencia de figuras siguientes se muestra las primeras cuatro etapas de la construcción de la alfombra de Sierpinski.



Construcción de la alfombra de Sierpinski

Otro de los ejemplos de los llamados fractales clásicos es la esponja de Menger, cuya construcción geométrica es análoga a la del triángulo de Sierpinski. La esponja de Menger es un fractal que tiene volumen 0 y área infinita, por lo tanto es una especie de versión tridimensional de la curva de Koch, la figura muestra las primeras etapas de su construcción, de la cual el lector puede deducir su proceso general de construcción.



Esponja de Menger

Capítulo 2

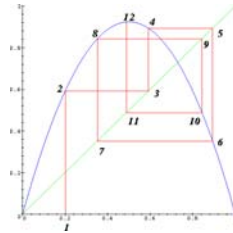
Iteración de funciones

Muchos modelos matemáticos se han construido para estudiar crecimiento de poblaciones, esta pueden ser de diferentes especies.

Si denotamos la ley que rige el crecimiento de una población por $x(n+1) = f(x(n))$, donde $x_0 = x(0)$ denota el valor que tomamos como valor inicial para nuestro estudio, entonces $x(n) = f^n(x(0))$, donde f^n significa f compuesta consigo misma n veces, es decir, $f^n = f \circ \dots \circ f$. Así $x(n)$ será el valor que tiene la variable poblacional en el tiempo después de n unidades de tiempo (segundos, minutos, días, años, siglos, milenios,...). Luego, el valor de la variable $x(n)$ en el siguiente estado es $x(n+1) = f(x(n))$. En Biología de poblaciones, $x(n)$ puede representar el tamaño de una población en la generación n , este modelo establece que el tamaño $x(n+1)$ de una población en la generación $n+1$ está relacionado al tamaño de la población en la generación precedente n por la función f . En epidemiología, $x(n)$ representa la fracción de población infectada en el tiempo n . En economía, $x(n)$ puede ser el precio por unidad en el tiempo n de un cierto bien transable. En Ciencias Sociales, $x(n)$ puede ser la cantidad de unidades de información que puede ser recordada después de un período n de tiempo.

Queremos saber cómo evoluciona la población a partir de un tamaño poblacional inicial $x(0) = x_0$, para ello debemos calcular $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \dots$. Antes de continuar, introducimos la notación siguiente, $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f \circ f(x)$, y en general, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $n \geq 1$. Así, en nuestro ejemplo, $x_3 = f^3(x_0)$, $x_4 = f^4(x_0), \dots$ y el problema ahora es describir la conducta de esta sucesión de puntos x_0, x_1, x_2, \dots . El proceso descrito arriba es llamado *iteración de una función*. Una forma de visualizar el proceso de iteración de una función es el siguiente. Graficamos la función $f(x)$ y la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ en el plano. Comenzando con x_0 , trazamos un segmento de recta paralelo al eje y en la dirección del gráfico de $f(x)$, la intersección de este segmento de recta con el gráfico de $f(x)$ es el punto $(x_0, f(x_0))$. A partir de este punto trazamos un segmento de recta paralelo al eje x en la dirección de la diagonal Δ , su intersección con la diagonal es el punto $(f(x_0), f(x_0))$, luego su coordenada de las abscisas es $x_1 = f(x_0)$. Continuando con este proceso, a partir del punto $(f(x_0), f(x_0))$ trazamos un segmento de recta paralelo al eje y en la dirección del gráfico de $f(x)$, su intersección con el gráfico de $f(x)$ es el punto $(x_1, f(x_1)) = (f(x_0), f^2(x_0))$. Ahora, a partir de este punto trazamos un segmento de recta paralelo al eje x en la dirección de la diagonal Δ , su intersección con esta es el punto $(f(x_1), f(x_1)) = (f^2(x_0), f^2(x_0))$, luego su abscisa es el $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$. Por lo tanto para visualizar geoméricamente las iteraciones de una función de variable real y a valores reales, es continuar con el proceso descrito arriba. En la figura siguiente se muestra las iteraciones de un punto x_0 el cual denotamos por el símbolo **1**. La intersección del segmento de recta a partir de x_0 y paralelo al eje y lo denotamos por el símbolo **2** y representa al punto $(x_0, f(x_0))$, el símbolo **3** representa al punto $(f(x_0), f(x_0))$, el símbolo **4** representa al punto

$(f(x_0), f^2(x_0))$, y así sucesivamente.



Desde el análisis de la figura se ve fácilmente que debemos hacer para describir geoméricamente la sucesión $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, 2, \dots$. Al conjunto $\text{orb}_f(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ lo llamamos *órbita positiva de x_0* .

Si un punto x satisface $f^n(x) = x$ y $f^j(x) \neq x$ para $0 < j < n$, decimos que x es un *punto periódico de período n* para f , geoméricamente, un punto es periódico de período n si el gráfico de la función $f^n(x)$ corta a la diagonal en dicho punto, y no es punto periódico de período menor.

2.1 Modelo lineal

Sea $x(n)$ el tamaño de una población de una cierta especie en el tiempo n . Llamemos μ a la razón de crecimiento de la población desde una generación a otra. Un modelo matemático simple que describe el tamaño de la población es el siguiente

$$x(n+1) = \mu x(n), \quad n \geq 0,$$

donde $x(0) = x_0$ es el tamaño inicial de población. Este modelo es llamado *modelo lineal*. Los estados de la población bajo este modelo son obtenidos iterando la función $f_\mu(x) = \mu x$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} x(1) &= f_\mu(x_0) = \mu x_0 \\ x(2) &= f_\mu(x_1) = \mu x(1) = \mu^2 x_0 \\ x(3) &= f_\mu(x_2) = \mu x(2) = \mu^3 x_0 \\ &\vdots \\ x(n) &= f_\mu(x_{n-1}) = \mu^n x_0. \end{aligned}$$

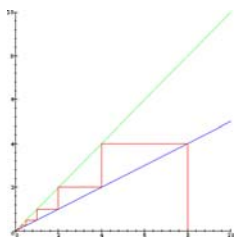
Como veremos a continuación el comportamiento de una población modelada de esta forma depende del valor de μ .

Supongamos primero que $\mu > 0$.

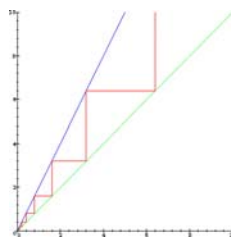
Extinción de la población. Si $0 < \mu < 1$, entonces como μ^n tiende a cero cuando n crece, la población se extinguirá, es decir, la iteración de cada punto por la función $f_\mu(x) = \mu x$ se aproxima a cero cuando n crece indefinidamente. El punto $x = 0$ permanece fijo durante todas las iteraciones. La conducta de las iteraciones es mostrada en la figura siguiente.

Explosión de la población. Si $\mu > 1$, la población crece indefinidamente, pues en este caso μ^n crece indefinidamente cuando $n \rightarrow \infty$, decimos en este caso que tenemos una explosión de la población. El punto $x = 0$ permanece fijo durante todas las iteraciones. La conducta de las

iteraciones cuando $\mu > 0$ y $\mu \neq 1$, son mostradas en las figuras siguientes



Modelo lineal con $0 < \mu < 1$



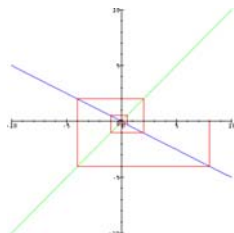
Modelo lineal con $\mu > 1$

Población estable: no crece ni decrece. Si $\mu = 1$, entonces $x(n) = x_0$ para todo n , y la población permanece constante.

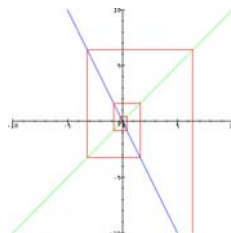
Supongamos ahora que $\mu < 0$. En este caso decimos que tenemos un modelo de *tela de araña*, por razones obvias al observar las iteraciones de la función $f_\mu(x) = \mu x$.

Caso $-1 < \mu < 0$. Si $-1 < \mu < 0$, entonces las iteraciones de cada punto x_0 , con $x_0 \neq 0$, tienden a 0, pero esta vez lo hace espiralando como se muestra la figura abajo. La población tiende a extinguirse, pero la conducta de ella es de espiral. El punto $x = 0$ permanece fijo durante todas las iteraciones. La conducta de las iteraciones es mostrada en la figura siguiente.

Caso $\mu < -1$. Cuando $\mu < -1$, las iteraciones de cualquier punto, excepto $x = 0$, tiende a infinito espiralando como muestra la figura siguiente. El punto $x = 0$ permanece fijo durante todas las iteraciones. La conducta de las iteraciones cuando $\mu < 0$ y $\mu \neq 1$ son mostradas en las figuras siguientes



Modelo lineal con $-1 < \mu < 0$



Modelo lineal con $\mu < -1$

Caso $\mu = -1$. En este caso, la conducta se repite periódicamente cada dos iteraciones, pues $f_\mu(f_\mu(x)) = x$ para todo $x \neq 0$, el punto $x = 0$ permanece fijo durante todas las iteraciones.

Como vimos el modelo lineal de poblaciones es muy fácil de analizar, su conducta depende sólo del valor del parámetro μ , y sólo ocurren las conductas antes vistas.

2.2 Iteraciones de la función $x \longrightarrow \sqrt{x}$

Continuando con la iteración de funciones consideremos la transformación definida por la fórmula

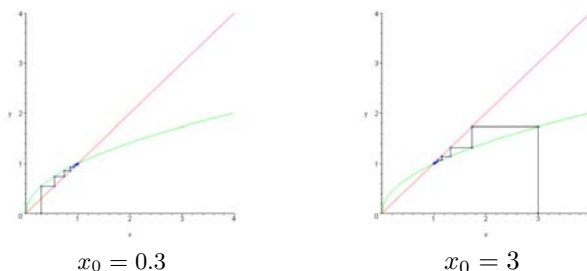
$$x \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{x}$$

Si elegimos un número positivo x_0 , el cual consideremos como valor inicial y aplicamos repetidas veces la fórmula “extraer raíz cuadrada” obtenemos una sucesión de valores

$$x_0 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} x_1 = \sqrt{x_0} \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} x_2 = \sqrt{x_1} = \sqrt{\sqrt{x_0}} \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} x_3 = \sqrt{x_2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0}}} \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \dots$$

Note que la sucesión x_n siempre converge a 1, independiente de la condición inicial que tomemos. En concreto, si tomamos $x_0 = 2$ obtenemos $x_1 = \sqrt{2} = 1.414212562\dots$, $x_2 = \sqrt{\sqrt{2}} = 1.189207115\dots$, $x_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 1.09057733\dots$, después de aplicar varias veces la función $x \mapsto \sqrt{x}$ en la calculadora, veremos aparecer un 1, lo cual es resultado de las aproximaciones

que hacen internamente las máquinas, pues este valor es alcanzado sólo cuando $x_0 = 1$. Ahora, si $x_0 = 0.3$ entonces obtenemos $x_1 = 0.547722557\dots$, $x_2 = 0.740082804\dots$, $x_3 = 0.860280654\dots$, y así sucesivamente, aplicando reiteradas veces la función $x \mapsto \sqrt{x}$ vemos aparecer finalmente el número $0.999999999\dots$, el cual es más correcto que el obtenido en el caso anterior. Las siguientes figuras muestran las iteraciones de la función $x \mapsto \sqrt{x}$, la cual tiene a $x = 0$ como punto fijo repulsor y a $x = 1$ como único punto fijo atractor. No hay otros puntos fijos ni periódicos para esta función.



2.2.1 Método de Newton

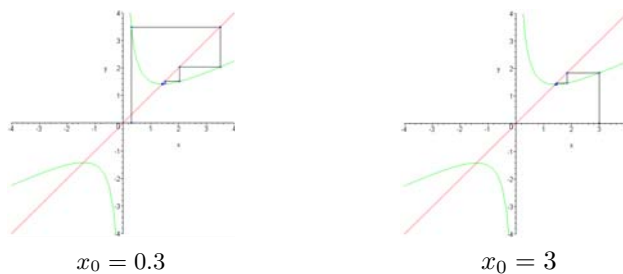
Otro ejemplo de un proceso iterativo definido mediante una función es el siguiente. Dado un número real positivo a , el proceso iterativo¹

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

nos permite aproximar, tanto cuanto deseemos, el valor de \sqrt{a} comenzando con un número real positivo x_0 . Por ejemplo, si $a = 2$, entonces sabemos que $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$. Considerando $x_0 = 3$, usando la fórmula iterativa, obtenemos la sucesión de valores,

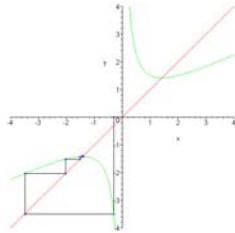
n	x_n
0	3
1	1.8333333...
2	1.46212121212...
3	1.41499842990...
4	1.41421378004...
5	1.41421356238...
6	1.41421356238...

detenemos el proceso en $x_6 = 1.41421356238\dots$, pues este valor tiene un error de $0.1 \cdot 10^{-10}$ con el valor de $\sqrt{2}$ obtenido mediante la calculadora, es decir, $|\sqrt{2} - x_6| = 0.1 \cdot 10^{-10}$.

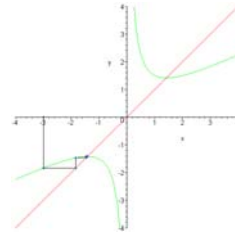


¹Este proceso iterativo es conocido desde muy antiguo, lo usaban los babilonios para el cálculo de raíces cuadradas, posteriormente es conocido como *método de Newton*

Si comenzamos con un valor inicial $x_0 < 0$ entonces la sucesión que se genera se aproxima a $-\sqrt{a}$.



iteraciones de Newton, $x_0 = -0.3$



iteraciones de Newton, $x_0 = -3$

En general, para calcular $\sqrt[n]{a}$ podemos usar la fórmula iterativa

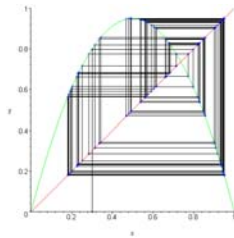
$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right),$$

por ejemplos para calcular aproximaciones del valor $\sqrt[3]{a}$ podemos usar la sucesión

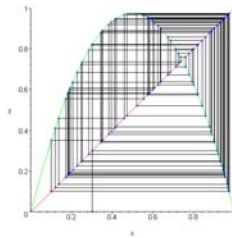
$$x_{k+1} = \frac{1}{3} \left(2x_k + \frac{a}{x_k^2} \right).$$

Podemos, por ejemplo, usar la fórmula iterativa anterior para calcular aproximadamente $\sqrt[3]{2}$.

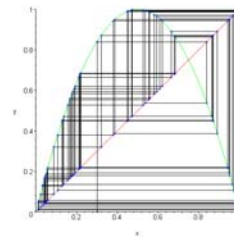
Iterar funciones, en general, es una tarea complicada, las siguientes figuras ilustran las iteraciones obtenidas de la función logística $f(x) = \lambda x(1-x)$ para λ próximo de 4.



$\lambda = 3.8$



$\lambda = 4.0$



$\lambda = 4.0$

Algunos lectores y autores llaman a esto un proceso caótico, pero por el sólo hecho que las iteraciones sean complicada, no hace que la aplicación sea caótica. La definición precisa de aplicaciones caóticas requiere de conceptos matemáticos que caen fuera del objetivo básico de este texto.

Capítulo 3

Representaciones Numéricas

Para representar números en algún sistema numérico, lo primero que debemos hacer es definir cuál será el conjunto de dígitos. Para el sistema decimal el conjunto de dígitos es $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para el sistema binario el conjunto de dígitos es $D = \{0, 1\}$. Estos representan los sistemas numéricos más comúnmente usados, el primero por ser el de uso cotidiano y el segundo por ser usado por los sistemas computacionales. Otros de uso no tan difundido son los sistemas en base 3 (representación ternaria), base 8 y base 16. El uso de representaciones en ciertas bases es muy antiguo, por ejemplo, los Babilonios usaban base 60 para representar los números.

3.0.2 Representación decimal

Para el sistema decimal el conjunto de dígitos es $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Comenzemos por estudiar la representación con un número natural. Queremos expresar un número natural n como una suma de potencias de 10 y coeficientes (dígitos) en D , en otras palabras, queremos escribir

$$n = k_0 + k_1 10 + k_2 10^2 + \dots + k_N 10^N = \sum_{i=0}^N k_i \cdot 10^i$$

donde N es un entero no negativo y los coeficientes $k_i \in D$, $i = 0, 1, \dots, N$. Obtenemos esta representación aplicando reiterativamente el *algoritmo de la división* de Euclides. Para esto, simplemente debemos notar que para cada número natural n existe un entero positivo ℓ de modo que $10^\ell \leq n < 10^{\ell+1}$. En resumen, hemos visto que cada número natural n se puede expresar como una suma de potencias de 10 y coeficientes (dígitos) en D . Esta representación es llamada *representación decimal (o en base 10) de n* .

El mismo tipo de representación mediante una suma finita para un número real x con $0 \leq x < 1$ ya no es posible, por ejemplo para el número racional $2/3$ se tiene

$$\frac{2}{3} = 0.666666\dots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j} = 6 \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j}.$$

Por lo tanto debemos estudiar la convergencia de la serie infinita $\sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j}$. En este ejemplo, esto es inmediato puesto que ella es una serie geométrica de razón $1/10$ y su suma es $2/3$.

A continuación construimos una representación decimal para los números reales x con $0 \leq x \leq 1$. Denotaremos a este conjunto por el símbolo $[0, 1]$ y geoméricamente lo representaremos por el segmento de recta de longitud 1. En otras palabras, a cada punto de la recta corresponde un elemento de $[0, 1]$. Dado $x \in [0, 1]$ queremos representarlo como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}$$

donde para cada $i \geq 1$, los coeficientes (dígitos) k_i son elementos en D . La forma de obtener esta representación es análoga a lo que ya hicimos, para ello basta observar que existe un único k_1 elemento en D tal que $k_1/10^n \leq x < (k_1 + 1)/10^n$, de este modo obtenemos que x puede escribirse en la representación (3.1). Como en el ejemplo de la representación decimal del número $\frac{2}{3}$, el problema se reduce a examinar si la serie del lado derecho en la representación de x es convergente. Para mostrar esto notemos primero que $k_i/10^i \leq 9/10^i$ para cada $i \geq 1$, pues se tiene que $k_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Sea $x_n = \sum_{i=1}^n k_i \cdot 10^{-i}$ la suma parcial hasta el término n de la serie $\sum_{i \geq 1} k_i \cdot 10^{-i}$ y sea $G_n = \sum_{i=1}^n 9 \cdot 10^{-i}$ la correspondiente suma parcial de la serie geométrica $\sum_{i \geq 1} 9 \cdot 10^{-i}$. Puesto que los coeficientes de la serie geométrica son positivos se obtiene que

$$x_n \leq G_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 1,$$

lo cual muestra que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente por 1.

Además, la sucesión de sumas parciales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, pues cada vez estamos sumando nuevos términos no negativos (mayores o iguales que cero). Aplicamos el siguiente resultado *toda sucesión de números reales, creciente y acotada superiormente, es convergente*, concluimos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, esto es, la serie $\sum_{i \geq 1} k_i \cdot 10^{-i}$ es convergente y su suma $x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}$ es un número real en el intervalo $[0, 1]$. De lo anterior, tenemos que *dado un número real x con $0 \leq x \leq 1$ y un número $\varepsilon > 0$ pequeño, existe un número racional q tal que $|x - q| < \varepsilon$* , es decir, podemos aproximar tanto cuanto deseemos un número real por números racionales. Para verlo, consideremos el desarrollo decimal de x , esto es, escribamos $x = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}$. Definamos para cada número natural n el número

$$q_n = \sum_{i=1}^n k_i \cdot 10^{-i}.$$

Es claro que que cada q_n es un número racional (pues es una suma finita de números racionales). Además, $|x - q_n|$ satisface que

$$|x - q_n| = \sum_{i=n+1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 10^{-n}$$

de donde se deduce que $|x - q_n|$ se aproxima a cero cuando n crece indefinidamente o más precisamente eligiendo n_0 de tal manera que $1/10^{n_0} < \varepsilon$ y definiendo $q = q_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0} k_i \cdot 10^{-i}$ se obtiene lo pedido.

Luego, dado un número real x en el intervalos $[0, 1]$ hemos construido una sucesión de números racionales que aproxima a x .

Para terminar veremos que si tenemos un número real $x \geq 1$ también podemos construir aproximaciones mediante números racionales. Para ello, reduciremos el problema al caso $0 \leq x < 1$.

Para tal efecto escribamos $x = [x] + ((x))$, donde x es un número real con $x \geq 1$. Como $[x]$ es el mayor entero positivo menor o igual que x , este es un número natural y lo podemos representar de la forma $[x] = \sum_{i=0}^N k_i \cdot 10^i$, donde $k_i \in D$ y N es el menor natural tal que $10^N \leq [x] < 10^{N+1}$. Por otra parte como $0 \leq ((x)) < 1$ sabemos que $((x)) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 10^{-j}$, donde $k_j \in D$ para cada $j \geq 1$. En resumen, x se puede representar como

$$x = \sum_{i=0}^N k_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 10^{-j}.$$

La primera suma es la representación decimal del número natural $[x]$ y la segunda suma (que es una serie) es la representación decimal de la parte fraccionaria $((x))$ de x . Ahora, para cada número natural n definamos

$$q_n = [x] + \sum_{i=1}^n k_i \cdot 10^{-i}.$$

Cada q_n es un número racional y en forma análoga al caso anterior se demuestra que q_n se aproxima cada vez más a x cuando n crece indefinidamente.

Esta propiedad de los números racionales en los números reales es llamada *densidad de los racionales en los reales*.

Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1.414213\dots$ se puede escribir en la forma

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 10^0 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \dots$$

De este modo, utilizando la representación anterior, podemos escribir cada número real positivo en su forma decimal y obtener de este modo aproximaciones de él por números racionales.

En general la representación decimal de un número no es única, por ejemplo número 1 puede escribirse como

$$1 = 0 \cdot 10^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = 1 \cdot 10^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{0}{10^j}.$$

Cuando el denominador de una fracción irreducible p/q no es una potencia de 10, la representación decimal de él es periódica. Por otra parte, la pérdida de unicidad en la representación decimal de un número real ocurre cuando x es de la forma p/q con q una potencia de 10. Observemos también que un número irracional tiene representación decimal no periódica.

3.0.3 Representación en base $p > 1$

Hemos estudiado la representación decimal (base 10) de los números reales no negativos. Ahora trataremos de imitar esa construcción tomando como base un número natural $p > 1$ en vez de la base 10 ya considerada.

Como antes, comenzamos por definir nuestro conjunto de dígitos, el cual es $D = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Primero buscamos la representación en base p para los número naturales, es decir, dado un número natural n , queremos representarlo como una suma (finita) de potencias de p y coeficientes en el conjunto D , esto es, queremos expresar n en la forma

$$n = \sum_{i=0}^N k_i \cdot p^i = k_0 + k_1 p + \dots + k_N p^N,$$

donde los coeficientes k_i son elementos de D , $i = 0, 1, \dots, N$. Para lograrlo procedemos en forma similar al caso de la representación decimal y aplicamos el algoritmo de división con p en vez de 10.

Imitando lo realizado para $p = 10$, bastará lograr dicha representación para los números reales x en el intervalo $[0, 1[$. Para esto, dividamos los intervalos $[0, 1/p^n]$ ($n \geq 0$) en p partes iguales. Siguiendo las mismas directrices que se utilizaron para el caso $p = 10$ se obtiene la representación requerida, es decir, se concluye que x posee la representación

$$x = \sum_{j=0}^N k_j \cdot p^j + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot p^{-i}.$$

La convergencia de la serie del lado derecho de la igualdad anterior está garantizada debido a que se le compara con la serie geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} p^{-i}$ de razón $\frac{1}{p}$, con $p > 1$.

3.0.4 Representación triádica ($p = 3$)

Esta representación consiste en tomar $p = 3$ y por lo tanto el conjunto de dígitos es $D = \{0, 1, 2\}$. Entonces todo número real positivo x es representable como

$$x = \sum_{i=0}^N k_i \cdot 3^i + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$$

donde los coeficientes $k_\ell \in D$ para todo ℓ . Por ejemplo, $\frac{38}{81} = 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 0 \cdot 3^{-4} + \dots + 0 \cdot 3^{-n} + \dots$. Observemos que en este caso los coeficientes son $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 2$ y $k_j = 0$ para $j \geq 3$. Otros ejemplos de representaciones triádicas son

$$\begin{aligned} 15 &= 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 \\ \frac{7}{9} &= 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} \\ \sqrt{2} &= 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots \quad (\text{no periódica}) \\ \frac{2}{9} &= 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} = 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \dots + 2 \cdot 3^{-k} + \dots \end{aligned}$$

Calculemos en detalle el siguiente ejemplo

$$\frac{7}{8} = 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-5} + \dots$$

donde los coeficientes de subíndice impar son iguales a 2 y los con subíndice par son iguales a 1. Para probar esta última igualdad procedemos a partir la serie en dos series, una que agrupa los coeficientes pares y otra los impares. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} 2 \cdot 3^{-(2j+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} 1 \cdot 3^{-2j} &= \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} 9^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} 9^{-j} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

En general, un número real x tiene una representación finita en base 3, es decir,

$$x = \sum_{i=0}^N k_i \cdot 3^i + \sum_{j=1}^M k_j \cdot 3^{-j}$$

si y sólo si x es de la forma $m/3^n$, donde n y m son enteros positivos.

Notemos que si el denominador de la fracción irreducible p/q no es una potencia de 3 entonces la representación en base 3 de p/q es periódica. Por otra parte números irracionales poseen representaciones en base 3 no periódicas. Por ejemplo $\frac{1}{4} = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots$, aquí los coeficientes con índice impar son ceros y los coeficientes con índice par son iguales a 2.

Ejemplo

$$\frac{1}{7} = 0 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-5} + 2 \cdot 3^{-6} + 0 \cdot 3^{-7} + \dots$$

El bloque formado por los coeficientes $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = 2, k_5 = 1, k_6 = 2$ y $k_7 = 0$ en la expresión anterior se repite periódicamente.

Al igual que en el caso en base 10, cada número real tiene una representación triádica y existen números para los cuales se tiene al menos dos representaciones distintas, por ejemplo

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3} + \frac{0}{3} + \dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \dots$$

3.0.5 Conjunto de Cantor y representación en base 3

Veamos que el conjunto de Cantor está formado por los puntos $x \in [0, 1]$, cuya representación en el sistema en base 3 no contienen al dígito 1, es decir, puntos de la forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$$

donde, para cada $j \geq 1$, k_j es igual a 0 o 2.

Geoméricamente esto es hecho como sigue. Primero dividimos el intervalo $[0, 1]$ en 3 partes iguales, es decir,

$$[0, 1] = [0, 1/3] \cup]1/3, 2/3[\cup]2/3, 1].$$

Denotemos por I_0 , I_1 e I_2 los intervalos $[0, \frac{1}{3}]$, $] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [$ y $] \frac{2}{3}, 1]$, respectivamente. Los números en I_0 comienzan su representación en base 3 con el dígito $k_1 = 0$, los de I_1 con el dígito $k_1 = 1$ y los de I_2 con el dígito $k_1 = 2$, por lo tanto eliminamos de nuestro intervalo $[0, 1]$ el intervalo central abierto I_1 , nos restan entonces con los intervalos cerrados I_0 e I_2 . Ahora en los intervalos I_0 e I_2 buscamos los puntos para los cuales k_2 es 0 o 2. Tenemos que k_2 es igual a 0 en $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$ y en $I_{20} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, es igual a 1 en $I_{01} =] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} [$ y en $I_{21} =] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} [$, finalmente k_2 es igual a 2 en $I_{02} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ y en $I_{22} = [\frac{8}{9}, 1]$. Por lo tanto eliminamos de nuestros intervalos los intervalos centrales abiertos, I_{01} e I_{21} .

Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\Lambda_n = \{a_1 \dots a_n : a_i \in \{0, 2\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, es decir, Λ_n esta formado por todos los posible arreglos de largo n de ceros y dos, por ejemplo I_0 , I_2 los podemos escribir como, I_λ , con $\lambda \in \Lambda_1$ e I_{00} , I_{02} , I_{20} , I_{22} como I_λ con $\lambda \in \Lambda_2$.

Usando esta notación, podemos repetir el proceso anterior eliminando desde cada uno de los intervalos I_{00} , I_{02} , I_{20} e I_{22} los intervalos centrales abiertos I_{λ_1} donde $\lambda \in \Lambda_2$, obtenemos así una unión de 2^3 intervalos cerrados. En la etapa siguiente debemos eliminar de cada uno de los intervalos dejados, los intervalos centrales abiertos del tipo I_{λ_1} , con $\lambda \in \Lambda_3$. Continuando de este modo, en el paso n tenemos una unión de 2^n intervalos cerrados, y de cada uno de los cuales debemos eliminar los intervalos centrales abiertos I_{λ_1} , con $\lambda \in \Lambda_n$, y así sucesivamente. Es claro que los números eliminados tienen por lo menos un 1 en su representación triádica, los puntos que restan de la construcción sólo tienen dígitos 0 o 2 en su representación en base 3.

Mediante el proceso descrito arriba, obtenemos el conjunto de Cantor C , como habíamos afirmado.

Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ pertenece al conjunto de Cantor, pues como vimos antes,

$$\frac{1}{4} = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots,$$

donde los coeficientes de potencia par son iguales a 2 y los de potencia impar son iguales a 0.

Para tener otra imagen del conjunto de Cantor, hagamos la siguiente construcción:

Sea x un número real y sea $L \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Definimos la traslación de L por x como el conjunto

$$L + x = \{y + x : y \in L\}.$$

Ahora definamos una sucesión de conjuntos, L_k , donde $L_k = L_{k-1} + s_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Comenzamos por definir una sucesión $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, por $s_0 = \frac{2}{3}$ y para $k \geq 1$, $s_k = \frac{1}{3} s_{k-1}$. La sucesión de conjuntos L_k , con $k \geq 0$, es entonces definida por $L_0 = \{0\}$, y $L_k = L_{k-1} \cup (L_{k-1} + s_{k-1})$, para $k \geq 1$, por ejemplo,

$$L_1 = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}, \quad L_2 = \left\{0, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right\}, \dots$$

Note que $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_k \subset \dots$ y que L_k está formado por 2^k puntos distintos. Además, para cada $y \in L$ su representación en base 3 sólo contiene dígitos 0 o 2, por lo tanto cada conjunto L_k está contenido en el conjunto de Cantor, C . Denotemos por $L = \cup_{k \in \mathbb{N}} L_k$, es claro que $L \subset C$. Por otra parte, es fácil ver que $1/4$ no pertenece a L , por lo tanto $L \neq C$. Afirmamos que cada $x \in C$ se obtiene es aproximado tanto cuanto se desee por alguna sucesión de puntos en L , es decir, L es denso en C . En efecto, dado $x \in C$, su representación en base 3 es de la forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$$

donde $k_j = 0$ o 2 . Definamos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $x_n = \sum_{j=1}^n k_j \cdot 3^{-j}$, esto es, x_n corresponde a la suma de los primeros n términos de la representación de x en base 3. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in L_n$, y que

$$|x - x_n| = \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j} = 3^{-n}$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} = 0$, se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, lo que prueba nuestra afirmación.

3.0.6 Representación binaria ($p = 2$)

Esta representación consiste en tomar $p = 2$ y $D = \{0, 1\}$. Entonces todo número real positivo x es representable como

$$x = \sum_{i=0}^N k_i \cdot 2^i + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 2^{-j}$$

donde los coeficientes, $k_\ell \in D$ para todo ℓ . Por ejemplo,

$$\frac{137}{256} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 1 \cdot 2^{-8},$$

es decir, si consideramos los símbolos 001, 01011 ellos representan los números racionales

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ \frac{19}{32} &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}. \end{aligned}$$

Un número irracional debe tener infinitos unos en su expresión binaria (de otra forma representaría un número racional) y estos ceros y unos no tienen ninguna periodicidad. Es así como los símbolos 01001000100001..., 11011101111011110... representan números reales. El lector puede tratar de calcularlos.

Para las computadoras, calculadoras y relojes analógicos los números son objetos de diferentes longitudes con ceros y unos, donde la longitud de los símbolos que estas máquinas pueden calcular es finito (dependiendo de la capacidad de cada una) concluimos que ellas trabajan solamente con números racionales y sólo con una cantidad finita de ellos. Para máquinas que procesan con 8 y 13 dígitos respectivamente los resultados que generan para el número irracional $\sqrt{2}$ son 1.4142135 y 1.414213562373, respectivamente. Obviamente, por lo que sabemos estos valores son sólo aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$.

En las representaciones de números reales que hemos expuesto consideramos que tanto la base p ($p > 1$) y los dígitos D utilizados son números naturales, la verdad es que esto sólo sirvió para simplificar la exposición y los cálculos. En general, podemos contruir representaciones de los números reales usando una base cualesquiera p con $|p| > 1$ y un conjunto finito de dígitos $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$. La condición $|p| > 1$ es necesaria para garantizar la convergencia de las series geométricas involucradas en cada caso.

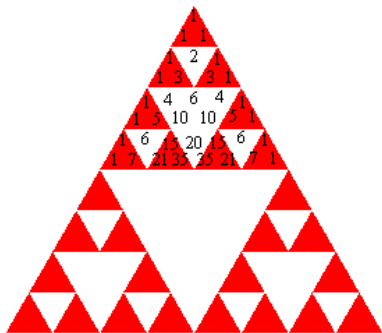
3.1 Triángulo de Sierpinski y representación en base 2

En el plano elegimos un sistema de coordenadas (u, v) con origen en $(0, 0)$, donde la recta de las abscisas coincide con el eje horizontal y la recta de las ordenadas forma un ángulo de 60° con el eje horizontal. Es fácil ver que las coordenadas en el plano uv , con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$ representan un punto en el triángulo de Sierpinski si y sólo si la expansión en base 2 de u y de v

nunca tienen un 1 en la misma posición. Ahora, al igual que como lo hicimos con el conjunto de Cantor, veremos como obtener una buena aproximación de los puntos del triángulo de Sierpinski. Definamos $s_0 = \frac{1}{2}$ y L_0 como cualquier conjunto con un punto, por ejemplo $(0,0)$. Enseguida definimos L_1 como la unión de L_0 y el trasladado de L_0 por s_0 en las dos direcciones de los ejes de coordenadas, y $s_1 = \frac{1}{2} s_0$, L_2 es definido como la unión de L_1 y los trasladados de L_1 por s_1 en las direcciones dadas, y así sucesivamente. Es claro que $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset S$, donde S es el triángulo de Sierpinski en el plano. Sea $L = \cup_{k \in \mathbb{N}} L_k$. Entonces $L \subset S$. Además, tenemos que *cada punto del triángulo de Sierpinski es aproximado tanto como se desee por una sucesión de puntos en L , es decir, L es denso en el triángulo de Sierpinski.*

Otra manera interesante de obtener una imagen del triángulo de Sierpinski, es considerar el triángulo de Pascal, es decir, el triángulo formado por los coeficientes binomiales del desarrollo del binomio $(x+y)^n$, con $n = 0, 1, \dots$. Enseguida marcamos de color negro cada número impar y marcamos de color blanco cada número par. Esto es hecho asignando a 0 el color blanco y a 1 el color negro, y los números en el triángulo de Pascal son considerados módulo 2 (es decir, si $k \in \mathbb{N}$ entonces $k = 1 \pmod{2}$ si y sólo si k es impar y $k = 0 \pmod{2}$ si y sólo si k es par). La figura obtenida se ve como el triángulo de Sierpinski. La siguiente figura muestra algunos números que quedan en este proceso

Considerando más filas en el triángulo de Pascal y considerándolo módulo 2, obtenemos la siguiente figura, que es bastante semejante al triángulo de Sierpinski



Capítulo 4

Sistemas de funciones lineales iterados en la recta y en el plano

Lo que desarrollamos en este capítulo corresponde a una parte “inocente” (en el sentido de que es básico y restringido a la recta y al plano) del tema y su implementación computacional. Esta es sólo una introducción, digamos somera a la teoría general, pero suficiente para que podamos experimentar con ella.

4.1 Sistemas de funciones iterados en la recta

Comenzamos por estudiar iteraciones de funciones en la recta. Para esto iniciamos el estudio con las más simples, *transformaciones afines*. Una transformación afín de la recta en si misma es una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde a, b son constantes reales. El número $b = f(0)$ es llamado el *factor de traslación* y a es llamado el *factor de contracción* si $|a| < 1$ o de *expansión* si $|a| > 1$, cuando $|a| = 1$ la aplicación es llamada una *similaridad*, pues $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

El efecto que tiene b es trasladar el origen al punto b , luego, para el análisis de cómo actúa una transformación afín de la recta en si misma, basta ver el efecto que tiene el coeficiente a .

Caso $a > 0$. En este caso, la imagen de un intervalo por $f(x) = ax$, digamos $[0, 1]$, es el intervalo $[0, a]$. Cuando $a < 1$ el intervalo es contraído al intervalo $[0, a] \subset [0, 1]$. Cuando $a > 1$ el intervalo inicial es expandido al intervalo $[0, a] \supset [0, 1]$. Finalmente, cuando $a = 1$ el intervalo es dejado invariante, es decir, no sufre modificaciones.

Caso $a < 0$. En esta caso, la imagen del intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = ax$ es el intervalo $[a, 0]$, el cual es contraído si $-1 < a < 0$ o expandido si $a < -1$, y cuando $a = -1$ el intervalo se transforma en $[-1, 0]$. Note que $f \circ f(x) = a^2x$, luego las segundas iteraciones se encuentran en la parte positiva de la recta. En general, $f^n(x) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = a^n x$, por lo tanto las

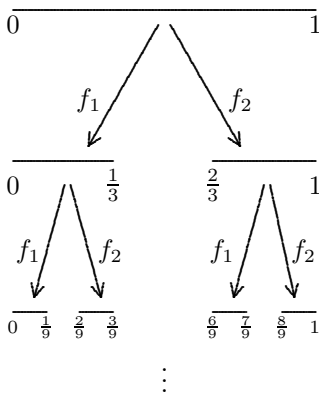
iteraciones pares se encuentran en la parte positiva de la recta y las iteraciones impares en la parte negativa.

4.1.1 Iteraciones de funciones afines en la recta

Veamos las iteraciones de una función afín de la recta en si misma. Sea $f(x) = ax + b$ una función afín. Entonces, $f^2(x) = f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(a^2x + ab + b) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$, y en general $f^n(x) = a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b$, de donde se obtiene que $f^n(x) = a^n x + \frac{b}{1-a} - \frac{ba^n}{1-a}$. Luego, si

$|a| < 1$ entonces a^n converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, y obtenemos que $f^n(x) \rightarrow \frac{b}{1-a}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, un cálculo directo nos da que $f\left(\frac{b}{1-a}\right) = \frac{b}{1-a}$, es decir, el punto $x_f = \frac{b}{1-a}$ es un punto fijo para $f(x) = ax + b$, de hecho es el único punto fijo para $f(x)$.

Por ejemplo, si $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ entonces su único punto fijo es $x_{f_1} = 0$ y la iteraciones $f_1^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo x . Si consideramos $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, su único punto fijo es $x_{f_2} = 1$. Como vemos ambas funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen iteraciones triviales. Pero ¿qué pasa si consideramos ambas transformaciones y las aplicamos a un conjunto, digamos al intervalo $I = [0, 1]$?, lo que queremos hacer lo ilustramos en la figura siguiente



es decir, al intervalo $[0, 1]$ le aplicamos las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, obtenemos dos intervalos como muestra la figura, a cada uno de esos nuevos intervalos, le aplicamos las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ y obtenemos 4 intervalos, y así sucesivamente ad infinitum, estas dos funciones operando conjuntamente, dan origen en este proceso iterativo al conjunto de Cantor, y por separado, sólo generan como imagen final un punto cada una de ellas

4.2 Sistemas iterados de funciones lineales en el plano

Ahora vamos a estudiar iteraciones de sistemas de funciones del plano en si mismo. En general, necesitamos el concepto de transformación contractiva, pero dado que esta es sólo una introducción al tema, nos limitaremos a estudiar las aplicaciones contractivas más simple, es decir, *transformaciones contractivas afines* del plano en si mismo.

Comenzamos con la definición general de transformación afín para después restringirnos a las que cumplen la condición de contractividad. Una *transformación afín* en el plano es una función $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma

$$T(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, la cual podemos escribir usando el lenguaje matricial como

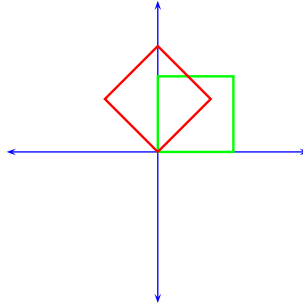
$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

la parte $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de la transformación $T(x, y)$ la llamamos *parte lineal* y al vector $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ lo llamamos *vector de traslación*.

Si llamamos (r_1, θ_1) a las coordenadas polares del punto del plano cuyas coordenadas rectangulares son (a, c) , es decir, $a = r_1 \cos(\theta_1)$ y $c = r_1 \sin(\theta_1)$ y $(r_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$ a las correspondientes al punto (b, d) , es decir, $b = r_2 \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) = -r_2 \sin(\theta_2)$ y $d = r_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) = r_2 \cos(\theta_2)$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Para visualizar la forma en que actúa una transformación afín sin traslación, es decir, cuando $e = f = 0$, notemos que el cuadrado unidad (con dos de sus lados sobre los ejes) se transformará en un paralelogramo, de acuerdo a la siguiente figura

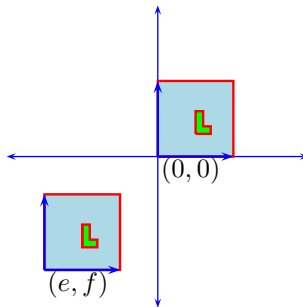


4.2.1 Traslaciones, reflexiones y rotaciones

Con el objetivo de visualizar como una figura geométrica es transformada mediante una transformación afín del plano en si mismo, estudiamos en detalles las traslaciones, reflexiones y rotaciones. En cada caso se muestra la forma particular de la matriz y el efecto típico que produce cuando la aplicamos al cuadrado unitario con lados sobre los ejes de coordenadas del plano.

4.2.2 Traslaciones

Estas tienen la forma siguiente $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, y geoméricamente su efecto sobre un cuadrado se muestra en la figura abajo



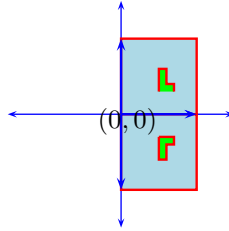
Si trabajamos en \mathbb{C} en lugar de \mathbb{R}^2 , la transformación toma la sencilla forma $T(z) = z + e + if$

La letra L puesta dentro del cuadrado inicial es sólo para indicar la posición en que queda el cuadrado después de la transformación.

4.2.3 Reflexiones

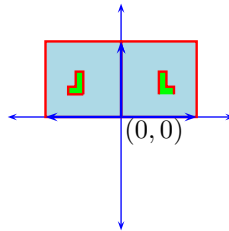
Estas son de tres tipos: reflexiones respecto al eje horizontal, respecto al eje vertical y respecto al origen.

- a) **Reflexiones respecto al eje horizontal.** Estas tienen la forma $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



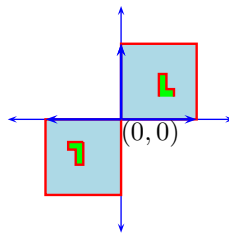
Usando la notación de números complejos, se tiene que $T(z)$ se escribe como $T(z) = \bar{z}$, donde si $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$ es el conjugado el número complejo z

- b) **Reflexiones respecto al eje vertical** Estas tienen la forma $T(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



En notación compleja $T(z) = -\bar{z}$

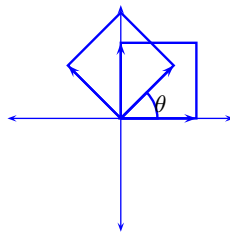
- c) **Reflexiones respecto al origen de coordenadas** Estas tienen la forma $T(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



En notación compleja $T(z) = -z$.

4.2.4 Rotaciones alrededor del origen

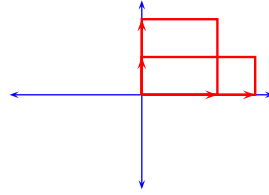
Las rotaciones alrededor del origen tienen la forma $T(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Usando la notación compleja, se tiene que $T(z) = kz$ con $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$ y $\arg(k) = \theta$.

4.2.5 Expansiones y contracciones al origen

Estas transformaciones afines tienen la forma $T(x, y) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Cuando $r_1 = r_2 = r$, es decir, contrae o expande con la misma razón en todas las direcciones, usando la notación de números complejos, se tiene que $T(z) = rz$.

4.2.6 Similitudes

Una *similitud* es una composición de transformaciones afines como las vistas antes. Tiene la forma particular siguiente $T(x, y) = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ o bien $T(x, y) = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Para el caso complejo $T(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, que produce una rotación dada por $\theta = \arg(a)$, una expansión o contracción dada por $|a|$, y una traslación dada por b .

4.3 Sistema de Funciones Iteradas

Volviendo al caso de una transformación afín del plano en si mismo

$$T(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

donde a, b, c, d, f son números reales. Decimos que T es contractiva si sus coeficiente a, b, c y d satisfacen la condición $|ad - bc| < 1$ llamada *condición de contractividad*.

Veamos como utilizando transformaciones afines contractivas podemos producir la curva de Koch.

Consideremos el cuadrado unitario (cuadrado de lado 1) Q , con un vértice en el origen. Aplicamos a Q la transformación afín contractiva $T_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$ y obtenemos el cuadrado Q_1 , de lado $\frac{1}{3}$. Enseguida al cuadrado Q le aplicamos la contracción T_1 obteniendo el cuadrado Q_1 al cual le aplicamos una rotación en 60° en el sentido positivo (antihorarios) obteniendo un cuadrado \tilde{Q}_2 , enseguida le aplicamos a \tilde{Q}_2 la traslación $Trasl(x, y) = (x + \frac{1}{3}, 0)$ (trasladamos a lo largo del eje x) y obtenemos el cuadrado Q_2 , es decir, aplicamos a Q la transformación afín $T_2(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{y}{6} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y)$. Aplicamos al cuadrado Q la transformación afín T_3 que hace lo siguiente: contrae Q al cuadrado de lado $\frac{1}{3}$, es decir, obtenemos Q_1 , luego aplicamos una rotación en 120° en el sentido positivo, obteniendo el cuadrado \tilde{Q}_3 , finalmente aplicamos la traslación en $\frac{2}{3}$ a lo largo del eje x , y obtenemos el cuadrado Q_3 , es decir, aplicamos a Q la transformación afín $T_3(x, y) = (\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{2}{3}, -\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}y)$. Finalmente, aplicamos a Q la transformación $T_4(x, y) = (\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3})$, que lo contrae al cuadrado Q_1 y que lo traslada a lo largo del eje x al punto de coordenadas $(\frac{2}{3}, 0)$.

Combinando, primero aplicamos T_1 , después T_2 , después T_3 y finalmente T_4 , a Q , aplicamos ala figura resultante T_1, T_2, T_3 y T_4 (en cualquier orden), y así sucesivamente. Garantizamos que el resultado final es la curva de Koch.

La pregunta es ¿cómo implementar el proceso anterior en un computador? En principio esto no sería fácil, pero se tiene el siguiente resultado.

Sea $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ una colección de transformaciones afines contractivas del plano en si mismo, con *factor de contracción* r_1, r_2, \dots, r_n , respectivamente. Sea (x_0, y_0) un punto arbitrario. Denotemos por $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ elecciones arbitrarias y aleatorias de los índices $1, \dots, n$ de las transformaciones afines. Entonces la sucesión de puntos (x_k, y_k) del plano obtenidas como sigue

$$(x_1, y_1) = T_{\sigma(1)}(x_0, y_0), (x_2, y_2) = T_{\sigma(2)}(x_1, y_1), (x_3, y_3) = T_{\sigma(3)}(x_2, y_2), \dots$$

después de despreciar sus primeros, digamos 100 elementos, llena una región del plano que corresponde a la figura “fractal” que se deseada generar, esta figura es llamada el *atractor del sistema de funciones iteradas* (IFS). El sentido de figura fractal en este caso corresponde al hecho que, en general, el borde geométrico (cuando ella tiene puntos interiores) de la figura o ella misma es una curva fractal.

Veamos cual sería el algoritmo computacional a implementar. Daremos el algoritmo en un pseudo-lenguaje, para que pueda ser adaptado a cualquier lenguaje computacional que se desee usar.

1. Ingrese los coeficientes $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ de las transformaciones afines contractivas T_i , $i = 1, \dots, n$.
2. Elija como punto inicial (x_0, y_0) un punto arbitrario, por ejemplo, $(0, 0)$
3. Divida el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos $I_1 = [\alpha_0, \alpha_1[$, $I_2 = [\alpha_1, \alpha_2[$, \dots , $I_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$, con $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_n = 1$
4. Elija una función random de su computador, normalmente llamada **rnd**.
5. Si **rnd** pertenece a I_j , es decir, si $\alpha_{j-1} \leq \text{rnd} \leq \alpha_j$, aplique la transformación T_j al punto (x_0, y_0) obteniendo un nuevo punto (x_1, y_1) , el cual se renombra nuevamente por (x_0, y_0) , y vuelva al paso 4. Después de aplicar, digamos 100 veces esta rutina, permita a su rutina pasar al paso 6 siguiente.
6. Grafique el punto (x_0, y_0) obtenido en el paso 5, pintándolo de color j (j dado por el paso 5) y repita los pasos 4 y 5. (Normalmente los computadores, de acuerdo a la tarjeta gráfica que poseen aceptan colores entre 0 y 16 (sistema VGA) o entre 0 y 255 (sistema super VGA) o entre 0 y 15999. Cuando considere que la figura que desaba generar ya tiene una textura deseable, detenga el programa.

Repetiendo este algoritmo una cantidad razonable de veces obtendrá una figura en su pantalla, la cual por lo general resulta bonita.

Ejemplos de sistemas de transformaciones afines contractivas.

4.3.1 Ejemplos

1. Conjunto de Cantor

Consideremos las transformaciones afines contractivas $T_1, T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $T_1(x) = \frac{x}{3}$ y $T_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, respectivamente. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado no vacío de la recta. Entonces, definiendo $T(K) = T_1(K) \cup T_2(K) = \{T_i(x) : x \in K, i = 1, 2\}$, se tiene que

$$T(K) = \frac{1}{3}K \cup \left(\frac{1}{3}K + \frac{2}{3} \right)$$

aquí αK significa el conjunto $\alpha K = \{\alpha x : x \in K\}$ y $\alpha K + \beta = \{\alpha x + \beta : x \in K\}$

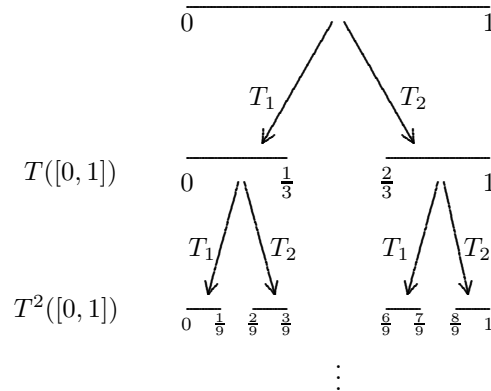
Aplicando T al resultado obtenido, tenemos

$$\begin{aligned} T^2(K) &= T(T(K)) = T\left(\frac{1}{3}K \cup \left(\frac{1}{3}K + \frac{2}{3}\right)\right) \\ &= T\left(\frac{1}{3}K\right) \cup T\left(\frac{1}{3}K + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{9}K \cup \left(\frac{1}{9}K + \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}K + \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}K + \frac{8}{9}\right). \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso de aplicar T al resultado obtenido en el paso anterior, tenemos

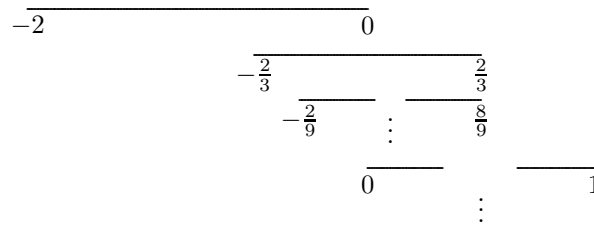
$$T^{n+1}(K) = T(T^n(K)) = \left(\frac{1}{3}T^n(K)\right) \cup \left(\frac{1}{3}T^n(K) + \frac{2}{3}\right).$$

Por ejemplo, tomando $K = [0, 1]$, nos queda



Ahora, si tomamos $K = [-2, 0]$, nos queda

$$\begin{aligned} T(K) &= \left[-\frac{2}{3}, 0\right] \cup \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ T^2(K) &= \left[-\frac{2}{9}, 0\right] \cup \left[0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[-\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$



y en ambos casos vemos que los conjuntos de $T^n(K)$ tienden al conjunto de Cantor clásico, es decir, el conjunto de Cantor es el atractor del sistema de funciones iteradas T_1 y T_2 anteriores.

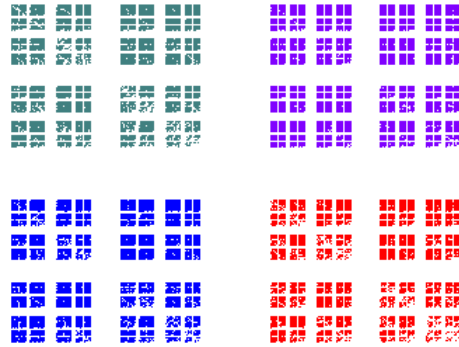
El conjunto de Cantor también puede ser considerado como el atractor de un sistema de funciones iteradas del plano en si mismo, para ellos basta considerar las transformaciones afines contractiva $T_1(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{2}y\right)$ y $T_2(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{2}y\right)$.

2. Producto de Conjuntos de Cantor

Sea $0 < \alpha < 1/2$, definamos las transformaciones afines contractivas

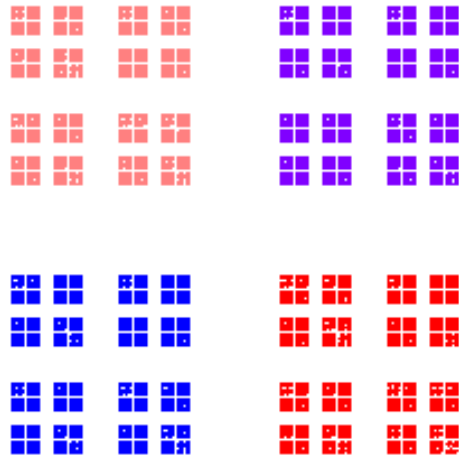
$$\psi_1(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \psi_2(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_3(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \psi_4(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

El radio de contracción de cada una de estas transformaciones afines es α , con $0 < \alpha < 1/2$. El atractor de este IFS lo denotamos por K_α y es un conjunto de Cantor igual al producto cartesiano de dos conjuntos de Cantor en la recta cuando $\alpha = \frac{1}{3}$. El caso límite es cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, en cuyo caso el atractor es el cuadrado unitario del plano.



K_α con $\alpha = \frac{1}{3}$

Con otros valores de α obtenemos otras figura, por ejemplo



K_α con $\alpha = \frac{1}{4}$

3. Triángulo de Sierpinski

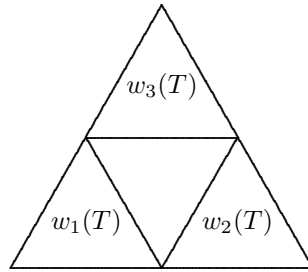
Comencemos con un triángulo T , por ejemplo, el triángulo equilátero con vértices en $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (2, 0)$ y $v_3 = 1 + \sqrt{3}i = (1, \sqrt{3})$. Los puntos medios de los tres lados son $u_3 = 1$, $u_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ y $u_1 = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}$. Existen tres triángulos equiláteros en cada vértice v_j , T_1 con vértice $\{v_1, u_2, u_3\}$, T_2 con vértices $\{v_2, u_1, u_3\}$, y T_3 con vértices $\{v_3, u_1, u_2\}$. Definimos tres transformaciones afines, $\{w_1, w_2, w_3\}$ con las condiciones $w_1(T) = T_1$, $w_2(T) = T_2$, y

$w_3(T) = T_3$, que fijan los vértices v_j y preservan la orientación, es decir, se tiene $\det(T_i) > 0$ para $i = 1, 2, 3$. Por ejemplo, $w_1(v_1) = v_1$, $w_1(v_2) = u_3$ y $w_1(v_3) = u_2$. Cada w_j tiene factor de contracción igual a $\frac{1}{2}$, y las fórmulas para cada una de ellas son: $w_1(z) = \frac{1}{2}z$, $w_2(z) = \frac{1}{2}z + 1$, y $w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, donde $z \in \mathbb{C}$. Matricialmente, ellas son dadas por

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

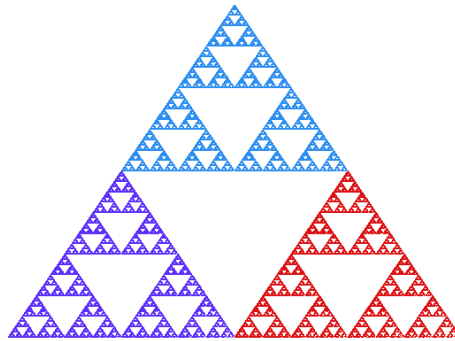
$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La siguiente figura muestra la primera etapa de la construcción del triángulo de Sierpinski, T , y sus imágenes por las transformaciones w_1, w_2 y w_3

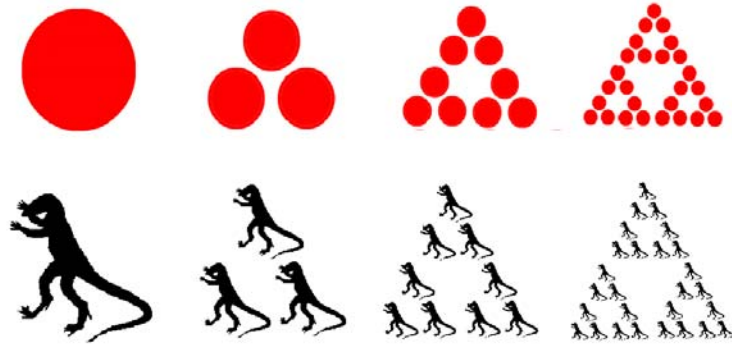


Primera etapa en la construcción del triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es el atractor del IFS, $\{w_1, w_2, w_3\}$ y una imagen de este se muestra en la figura abajo



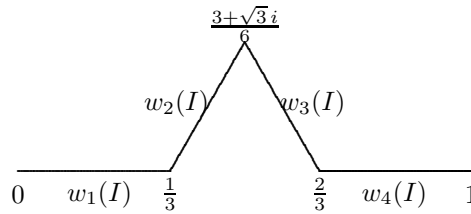
El hecho que no importa el conjunto inicial que elijamos para comenzar las iteraciones y obtener finalmente el atractor del IFS es demostrado en la generación del triángulo de Sierpinski, usando como inicio primero un disco, enseguida un dinosaurio y finalmente un gato



Sierpinski obtenido comenzando con un disco y después con un dinosaurio

4. Curva de Koch

Consideremos las transformaciones afines $w_j(z) = a_j z + b_j$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, son constantes y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Queremos transformar el intervalo unitario $I = [0, 1]$ en la siguiente figura mediante transformaciones afines w_j



Conociendo la localización de las imágenes de dos puntos podemos determinar a_j y b_j . A partir de la figura tenemos

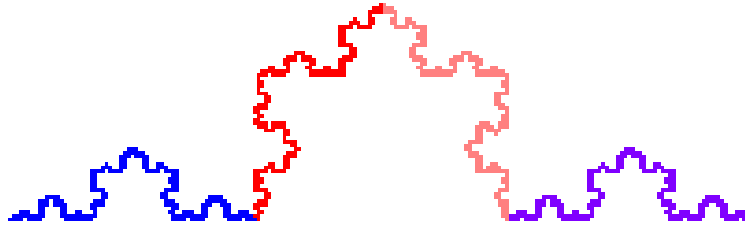
$$\begin{aligned} w_1(0) &= b_1 = 0, & w_2(0) &= b_2 = \frac{1}{3} \\ w_1(1) &= a_1 + b_1 = \frac{1}{3}, & w_2(1) &= a_2 + b_2 = \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} \\ w_3(0) &= b_3 = \frac{3 + \sqrt{3}i}{6}, & w_4(0) &= b_4 = \frac{2}{3} \\ w_3(1) &= a_3 + b_3 = \frac{2}{3}, & w_4(1) &= a_4 + b_4 = 1. \end{aligned}$$

Podemos resolver esas ecuaciones para encontrar a_j y b_j . Otra forma es observar que cada pedazo tiene longitud $\frac{1}{3} \times (\text{longitud del intervalo } I)$. Luego, el factor de contracción es $\frac{1}{3}$; para encontrar a_j sólo necesitamos encontrar la rotación producida. La constante b_j es siempre la imagen de 0. Un cálculo muestra que $w_1(z) = \frac{1}{3}z$, $w_2(z) = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{1}{3}$, $w_3(z) = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \frac{3+\sqrt{3}i}{6}$, y $w_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$, donde $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ es la exponencial compleja clásica.

Matricialmente, las transformaciones w_j ($j = 1, 2, 3, 4$) son dadas por

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\ w_4(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El atra



Curva de Koch

Pequeños pedazos de la curva de Koch, K , son obtenidos combinando varias de las transformaciones w_j . Cada $w_i(K)$ es un tercio del tamaño de K , luego cada conjunto $w_i(w_j(K))$ tiene tamaño igual a un noveno del tamaño de K . También K está formado por todos los pedazos $w_i(w_j(K))$ para todos los índices $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pedazos cada vez más pequeños son obtenidos aplicando más y más veces las transformaciones w_j ($j = 1, 2, 3, 4$), por ejemplo, $w_{a_1} \circ w_{a_2} \circ \dots \circ w_{a_n}(K)$, donde cada subíndice $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Este pedazo tiene diámetro igual a $\frac{1}{3^n} \times$ (diámetro de K). Cuando $n \rightarrow \infty$ esos pedazos cada vez más y más pequeños y convergen a un sólo punto de K . Luego, si llamamos a $\{1, 2, 3, 4\}$ el *espacio de códigos*, a cada sucesión $\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ en el espacio de códigos le corresponde un punto $z(\alpha)$ en la curva de Koch. Algunos puntos de la curva de Koch corresponden a dos elementos distintos del espacio de códigos, esto es, existen sucesiones $\alpha \neq \beta$ con $z(\alpha) = z(\beta)$. En general, la mayoría de los puntos corresponde exactamente a una única sucesión del espacio de códigos, mientras que una cantidad numerable corresponde a dos sucesiones distintas.

Un análisis similar al anterior, usando un espacio de código de dos elementos $\{1, 2\}$ para el conjunto de Cantor se puede ver que a cada sucesión $\alpha = \{a_1, a_2, \dots\}$, donde $a_i \in \{1, 2\}$, le corresponde un único punto del conjunto de Cantor y recíprocamente, cada punto del conjunto de Cantor determina una única sucesión α en el espacio de códigos.

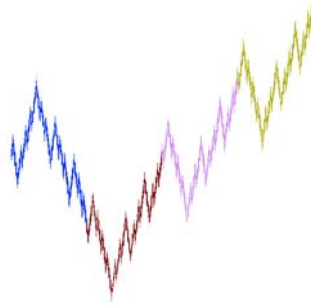
Queda a cargo del lector hacer un análisis como el anterior para el triángulo de Sierpinski.

5. Curva de Keisswetter

Consideremos las transformaciones afines contractivas w_1, w_2, w_3, w_4 del plano en si mismo dadas por

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, w_3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, w_4(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El atractor de este IFS es conocido como *curva de Keissweiter*



Curva de Keissweiter

Es claro que $\{w_i : i = 1, \dots, 4\}$ es un IFS, donde cada transformación afín tiene factor de contractividad $s_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, \dots, 4$.

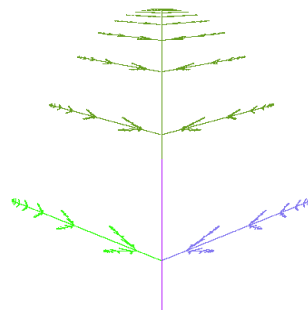
Actividad. Describir el efecto geométrico que tiene cada una de las transformaciones usadas para generar la curva de Keissweiter cuando las aplicamos al cuadrado unitario.

6. Araucaria

El atractor del siguiente IFS genera una figura que podríamos llamar *araucaria*, en honor al insigne y milenarario árbol.

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.28 \\ 0.15 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.28 \\ 0.15 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad w_4(x, y) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4.6 \end{pmatrix}$$

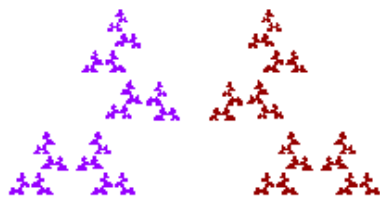
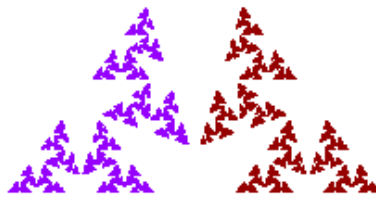


Araucaria

7. s -atractor

Sean $w_1, w_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $w_1(z) = (s + \frac{i}{2})\bar{z}$, $w_2(z) = (s - \frac{i}{2})(\bar{z} - 1) + 1$, donde $s \in \mathbb{R}$, con $0 < s < \frac{1}{2}$. En notación matricial, tenemos

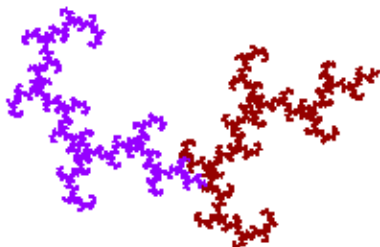
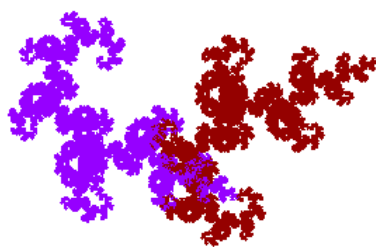
$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} s & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_2(x, y) = \begin{pmatrix} s & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-s \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

s-attractor $s = 0.3$ s-attractor $s = 0.35$ s-attractor $s = 0.4$ s-attractor $s = 0.45$

8. a -attractor

Para $0 < a < 1$ consideremos las siguientes familias $w_1, w_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dependientes del parámetro a ,

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad w_2(x, y) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}.$$

 a -attractor $s = 0.45$  a -attractor $s = 0.5$

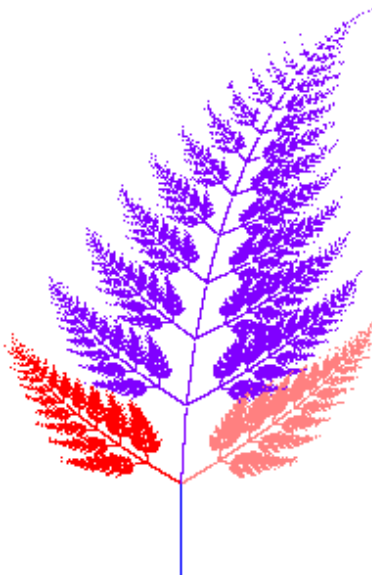
9. Helecho. El siguiente IFS genera una figura conocida con el nombre de *helecho* (fern)

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.203 \\ -0.035 \end{pmatrix}$$

$$w_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.26 \\ -0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.173 \\ 1.628 \end{pmatrix}$$

$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} -0.15 & -0.28 \\ -0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.222 \\ 0.465 \end{pmatrix}$$

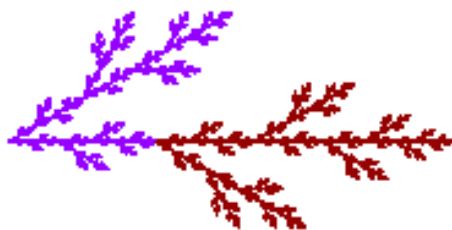
$$w_4(x, y) = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.04 \\ 0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.029 \\ 1.597 \end{pmatrix}$$



Helecho

Esta figura fue una de las primeras, por no decir, la primera, de donde se gestó la idea de usar los IFS para *comprimir imágenes*, proceso conocido como *compresión fractal de imágenes* (del inglés, fractal image compression)

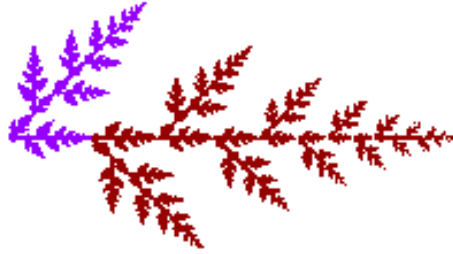
10. La siguiente figura



es generada por el IFS $\{w_1, w_2\}$, donde $w_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $w_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. La siguiente figura es generada por el IFS $\{w_1, w_2\}$ dado por

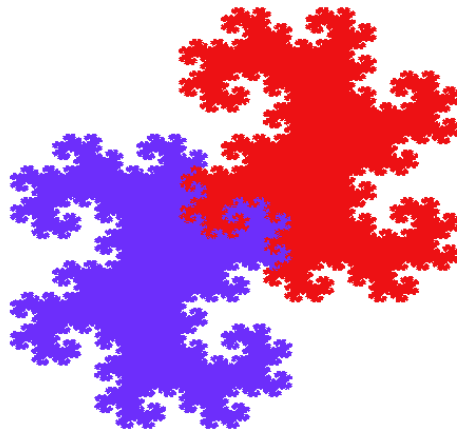
$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad w_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0.82 & 0 \\ 0 & -0.82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Cambiar esta figuras, esta mal, colocar la figura correcta

12. Familia de Dragones

Las imágenes generadas por la siguiente familia de contracciones son comunmente llamados dragones, por su similitud con aquellos de los grabados chinos, $S_{\pm}(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $|a_{ij}| < 1$



Dragón

13. Fractales y representación de números complejos

En el caso de números reales, dado $b \in \mathbb{R}$, con $|b| > 1$, podemos escribir cada número real en base b . Esto mismo puede ser hecho para el caso de números complejos, es decir, podemos escribir los números complejos en la forma

$$z = \sum_{j=0}^n \alpha_j z_j + \sum_{j=-\infty}^{-1} \beta_j z_j,$$

donde los coeficientes pertenecen a un conjunto finito $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell\}$, llamado conjunto de dígitos. (Esto será estudiado con más detalles en una sección posterior.)

Si sólo consideramos la parte fraccionaria $\sum_{j=-\infty}^{-1} \beta_j z_j$ de la representación anterior, podemos obtener figuras fractales interesantes, estas vienen dadas através de las transformaciones afines contractivas complejas

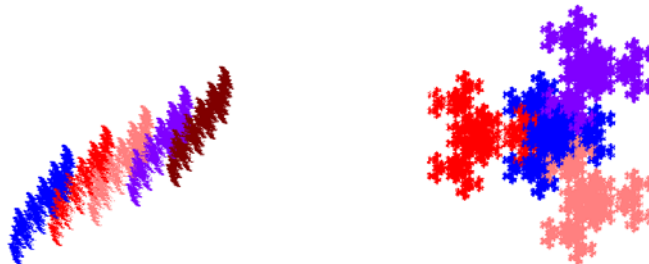
$$\omega_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dadas por } \omega_k(z) = s^{-1}z + (k-1)s^{-1},$$

donde $k = 1, 2, \dots, n^2 + 1$, con $s = -n + i$, $n > 0$. Matricialmente las transformaciones ω_j son dadas por

$$\omega_k(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{n^2+1} & \frac{1}{n^2+1} \\ -\frac{1}{n^2+1} & -\frac{n}{n^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{(k-1)n}{n^2+1} \\ -\frac{k-1}{n^2+1} \end{pmatrix}$$

$k = 1, \dots, n^2 + 1$.

Por ejemplo,



Fracciones con $b = 2 - i$ y $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ Fracciones de Eisenstein

El lector puede experimentar con este tipo de matrices utilizando el programa *fractsp*.

4.4 Curvas Fractales

4.4.1 Nota Histórica

Las primeras construcciones de, tal vez, los más clásicos ejemplos de fractales conocidos se remontan al siglo XIX y corresponden a curvas continuas que no poseen tangente en cada punto ([12]). Estas curvas fueron construidas para mostrar que una afirmación *evidente* a nuestros ojos es falsa

“el gráfico de una función continua posee tangente bien definida en todos, salvo quizás, un número finito de sus puntos”

En 1806, A. -M. Ampère dió por primera vez una “prueba” de la afirmación anterior. Esta prueba, ciertamente errónea apareció en varios textos de estudio, por ejemplo, Duhamel (1856) y J. Bertrand (1864). Otra demostración, también errónea fué dada en 1855 por M. E. Lemarle. En 1872, Ph. Gilbert intenta mejorar las lagunas de la prueba de Lemarle, cosa curiosa, él conocía un ejemplo dado por Hankel en 1870 el cual refutaba la afirmación. En 1873, H. -A. Schwarz dió un ejemplo que convenció a Gilbert de la imposibilidad de dar una demostración correcta a esa afirmación tan amplia.

Según K. Weierstrass (1872), B. Riemann habría sido el primero en afirmar su convicción contraria a la afirmación hecha más arriba, esto alrededor de 1861. Para mostrarlo exhibió una función continua cuya gráfica no tiene tangente bien definida en todos sus puntos. Este ejemplo, como veremos más adelante no es correcto. Por otra parte, el mismo Weierstrass propone un ejemplo similar en 1872 (esta vez correcto).

Los ejemplos de Riemann y de Weierstrass son de carácter analítico, es decir, se tiene una fórmula explícita para la función. En general dichas fórmulas son expresadas en términos de series de funciones, lo cual hace difícil comprender geoméricamente la razón por la cual sus gráficos no poseen tangentes bien definidas en la mayoría (en algún sentido) de los puntos.

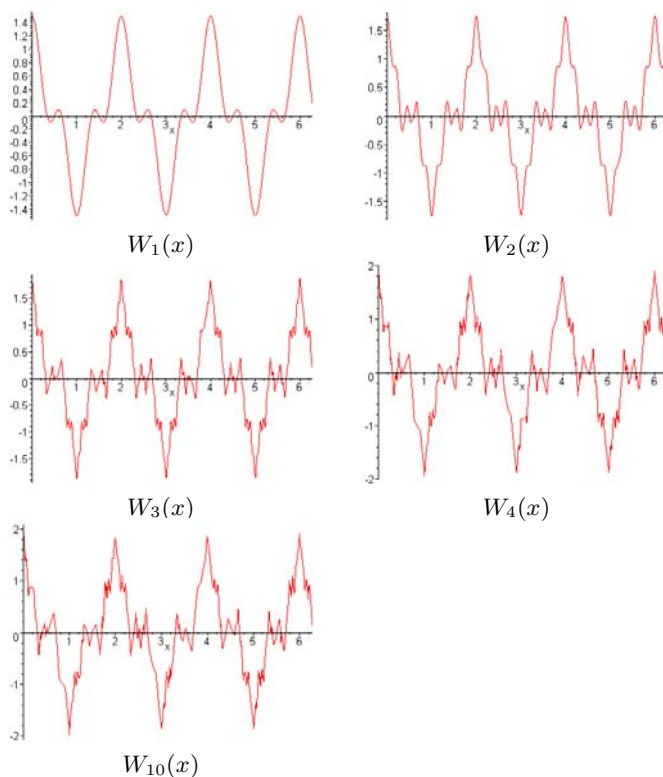
4.4.2 Función de Weierstrass y función de Riemann

El problema de la existencia de una función continua cuyo gráfico no tiene tangente bien definida en cada uno de sus puntos fué, como se indicó, resuelto por Weierstrass considerando la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) ,$$

donde a es un entero impar, $0 < b < 1$, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Weierstrass probó que el gráfico de $W(x)$ no tiene tangente bien definida en cada uno de sus puntos. Por otra parte, Hardy [18] probó que el gráfico de $W(x)$ no tiene tangente bien definida en cada uno de sus puntos cuando $0 < b < 1$, $a > 1$ y $ab \geq 1$.

Actualmente, se sabe que para la mayoría, en un sentido matemático bien definido, de las funciones continuas sus gráficos no tienen tangentes bien definidas en cada uno de sus puntos. Ejemplos explícitos de tales funciones son difíciles de dar. Las siguientes figuras muestran gráficos de la función $W_k(x) = \sum_{n=0}^k b^n \cos(a^n \pi x)$ para $x \in [0, 2\pi]$ y $k = 1, 2, 3, 4$, y $k = 10$. Note que $W_k(x) \rightarrow W(x)$ cuando $k \rightarrow \infty$, y que a medida que k crece el gráfico de la correspondiente función $W_k(x)$ presenta cada vez más puntos en los cuales se tiene una punta y no puede tener tangente bien definida ahí.

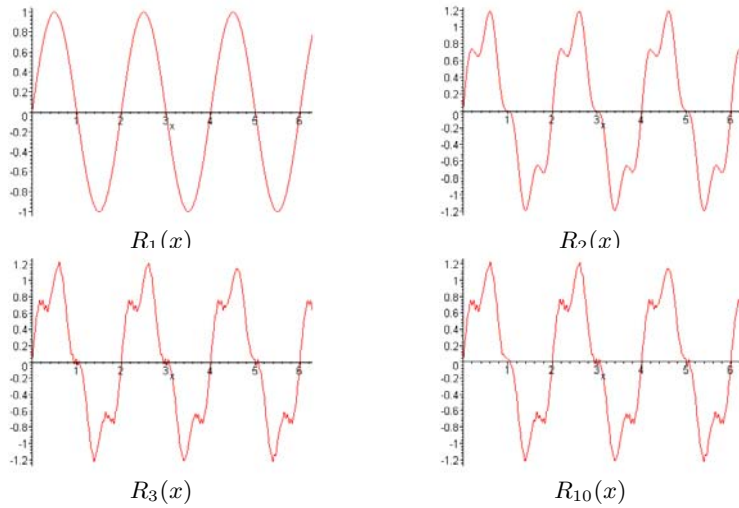


El ejemplo propuesto por Riemann para refutar la afirmación anterior es la función siguiente,

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^2 \pi x)}{n^2}$$

conocida actualmente con el nombre de *función de Riemann*. Las siguientes figuras muestran algunas gráficas de las funciones $R_k(x) = \sum_{n=1}^k \frac{\text{sen}(n^2 \pi x)}{n^2}$ para $x \in [0, 2\pi]$ y $k = 1, 2, 3$ y

$k = 10$. Note que $R_k(x) \rightarrow R(x)$ cuando $k \rightarrow \infty$, y que a medida que k crece el gráfico de la correspondiente función $R_k(x)$ presenta cada vez más puntos en los cuales se tiene una punta y no puede tener tangente bien definida ahí.



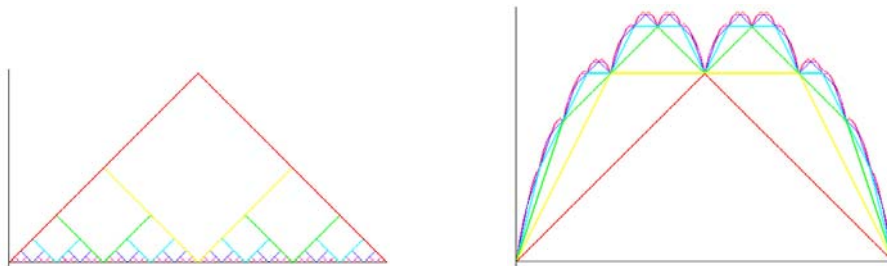
Weierstrass intentó, sin éxito, probar que el gráfico de $R(x)$ no tiene tangente bien definida en cada uno de sus puntos, y esto lo llevó a formular su propio ejemplo, la función $W(x)$. En 1916, Hardy probó que el gráfico de $R(x)$ no tiene tangente bien definida en los puntos irracionales, así como también en los puntos racionales de la forma $2p/(4q + 1)$ y $(2p + 1)/(4q + 2)$, ver [18]. Por otra parte, J. Gerver [17] probó que $R(x)$ tiene tangente bien definida en los puntos de la forma $(2p + 1)/(2q + 1)$ y no tiene tangente bien definida en los puntos de la forma $(2p + 1)/2^n$, $n \geq 1$. Finalmente, sólo en 1972, Smith consiguió dar una respuesta completa al problema, mostrando que $R(x)$ no tiene tangente bien definida en los restantes casos.

4.4.3 Curvas de Takagi

La siguiente curva fué introducida por Takagi como un ejemplo de una función continua cuyo gráfico no tiene tangente bien definida en cada uno de sus puntos. La ecuación de esta curva es dada por

$$\tilde{T}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k}$$

donde $d(x)$ es la distancia de x al entero más próximo.

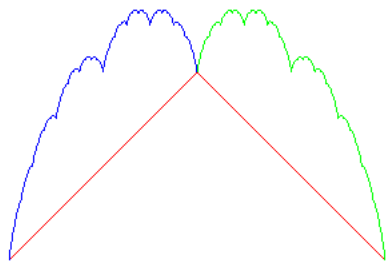


curvas de las funciones $x \mapsto \frac{d(2^k)}{2^k}$

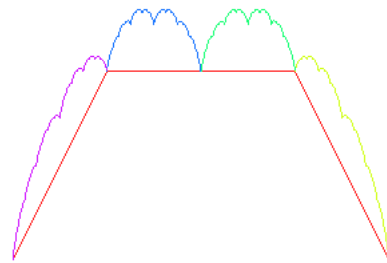
Gráfica de $\tilde{T}(x)$

La relación $\tilde{T}(x) = d(x) + \frac{\tilde{T}(x)}{2}$ muestra que la curva $\tilde{T}(x)$ para x entre 0 y 1 es el atractor del IFS $\{f_1, f_2\}$, donde $f_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $f_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Llamamos B al atractor. La siguiente figura muestra $B = f_1(B) \cup f_2(B)$ y $B = f_1^2(B) \cup f_1 \circ f_2(B) \cup f_2 \circ f_1(B) \cup f_2^2(B)$

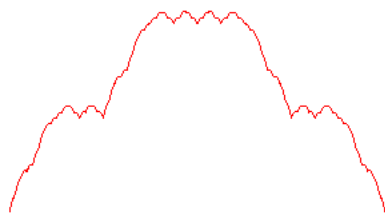


$$B = f_1(B) \cup f_2(B)$$

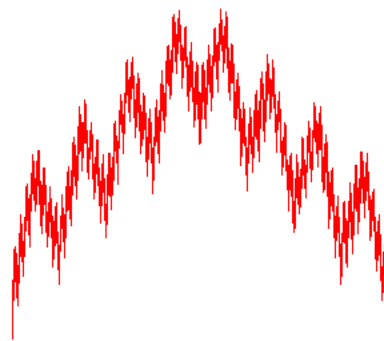


$$B = f_1^2(B) \cup f_1 \circ f_2(B) \cup f_2 \circ f_1(B) \cup f_2^2(B)$$

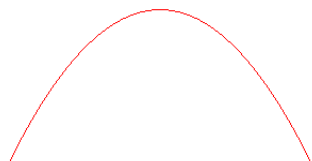
Algunas variaciones de esta curva de Takagi son dadas a continuación. Vale la pena indicar que no en todos los casos, la curva obtenida es un fractal, por ejemplo, puede ser una curva regular.



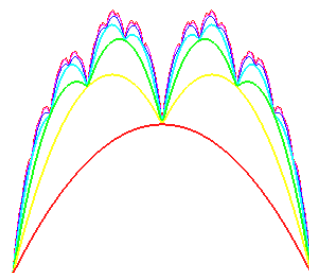
$$\text{Curva } x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(4^k)}{4^k}$$



$$\text{Curva } x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(8^k)}{8^k}$$



$$\text{Curva } x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(2^k)}{4^k} \\ \text{no es fractal}$$



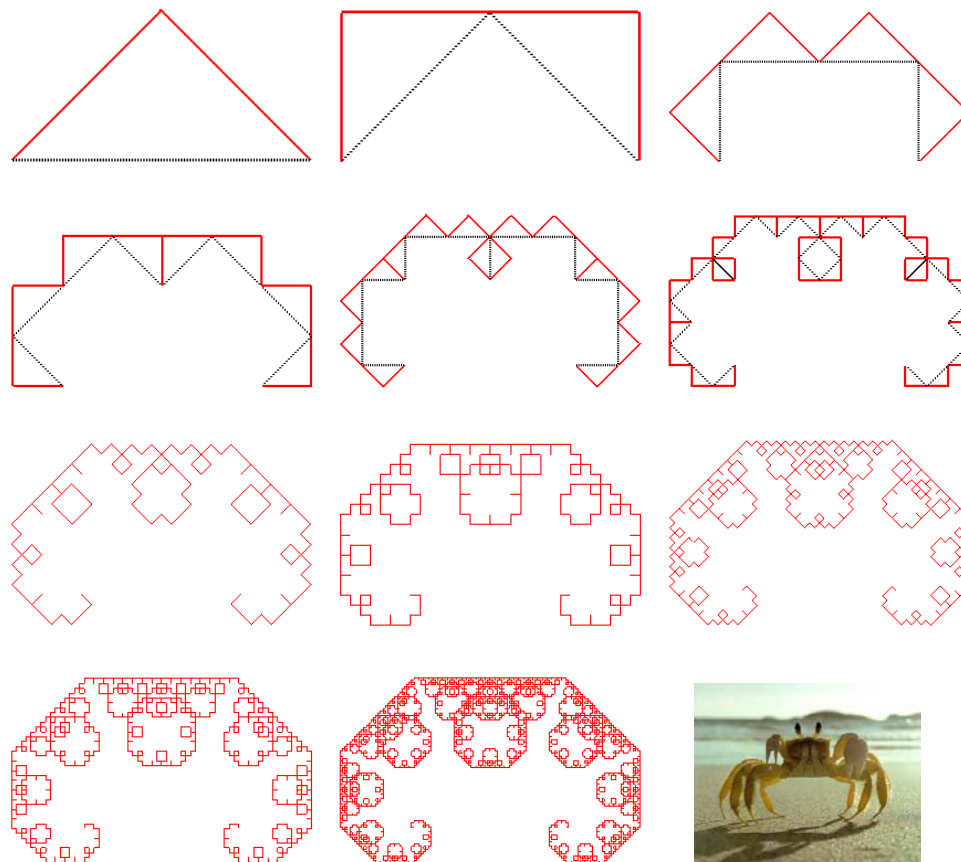
$$\text{Curva } x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k)}{2^k} \\ \text{donde } f(x) = 2d(x)(1 - d(x))$$

4.4.4 Curva de Levy

La curva de Levy¹ es el atractor en el plano de dos similitudes dirigidas de centros distintos A y B , de razón $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y de ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$, respectivamente (su dimensión fractal es menor o igual

¹Paul Lévy (1886–1971), matemático francés.

que $\frac{\log(2)}{\log(\sqrt{2})} = 2$). A seguir se muestra las etapas de la construcción de la curva de Levy



¿La figura final le recuerda a un cangrejo?

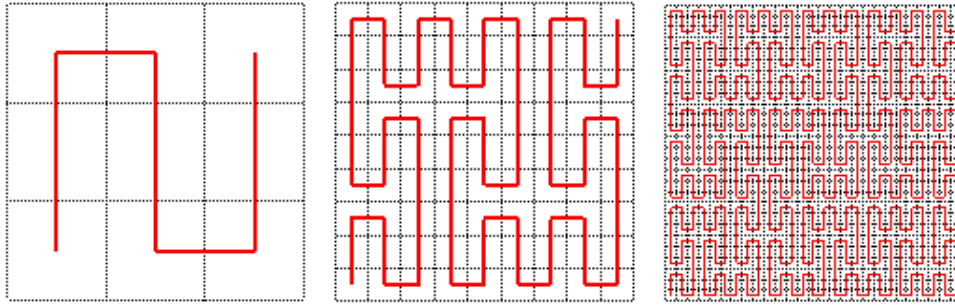
4.4.5 Curvas de Peano y de Hilbert

Las curvas de Peano y de Hilbert son curvas que llenan el cuadrado unitario del plano.

Para la construcción de la curva de Peano, particionamos el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano en 9 cuadrados pequeños, todos iguales, numeramos cada uno de esos cuadrados de modo que dos cuadrados sucesivos se tocan por un lado, comenzando por el cuadrado base de la extrema izquierda y terminamos en el cuadrado en la parte derechaizquierda, hay dos posibilidades, nosotros elegimos el camino vertical. Enseguida, particionamos cada uno de esos 9 cuadraditos en otros 9 cuadrados pequeños iguales, numeramos cada uno de esos 9 cuadraditos de manera que dos cuadraditos se tocan sólo en un lado, comenzamos por el cuadradito extremos izquierdo en la base y terminamos en el cuadradito superior extremo derecho, el primer cuadradito de uno de los cuadrados de la etapa anterior debe tener un lado en común con el primer cuadrado de la etapa anterior y el último cuadradito debe tener un lado en común con el cuadradito siguiente.

Repetimos indefinidamente el proceso anterior, obteniendo de esa forma la curva de Peano, la

cual llena todo el cuadrado unitario en el plano.



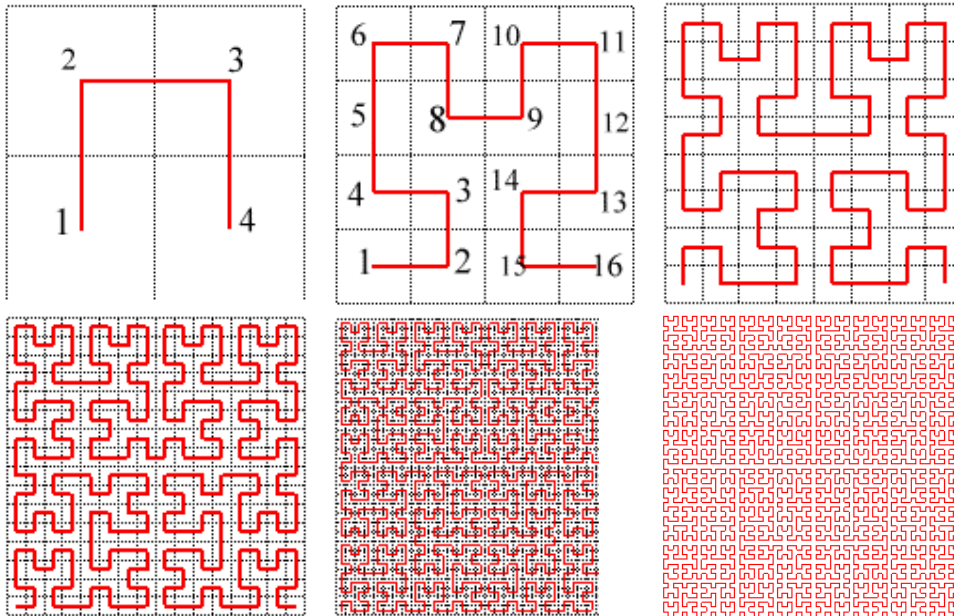
Curva de Peano

Dado un cuadrado $ABCD$, por ejemplo, $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ y $D = (0,1)$, la curva de Peano es la curva atractor del segmento de $[AC]$ asociado a una familia de 9 contracciones, similitudes de razón $1/3$, transformando el cuadrado grande en los nueve cuadraditos pequeños que lo componen, donde el cuadrado lleno $ABCD$ es el atractor.

La construcción de la curva de Hilbert es análoga aquella hecha para la curva de Peano.

La curva de Hilbert es la única curva de Peano binaria llenando el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ y tal que $M(0) = (0,0)$ y $M(1) = (1,0)$. Ella es definida por el algoritmo siguiente.

1. Particionamos el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en 4 cuadrados pequeños iguales, numeramos cada uno de esos cuadraditos de manera que dos cuadraditos sucesivos se tocan por un lado. Comenzamos por el cuadrado de la base extremo izquierdo, y terminamos por el cuadrado de la base en el extremo derecho
2. Particionamos cada uno de esos cuadrados en 4 cuadraditos pequeños. Numeramos esos cuadrados como se muestra en la figura
3. Repetimos el proceso indefinidamente



Curva de Hilbert

Índice Alfabético

- a*-atractores, 33
- s*-atractores, 32
- Área del triángulo de Sierpinski, 8
- Alfombra de Sierpinski, 8
- Cálculo del área acotada por el copo de nieve de Koch, 5
- Conjunto de Cantor, 7
- Conjunto de Cantor e iteración de un sistema de funciones afines en la recta, 22
- Conjunto de Cantor y representación en base 3, 17
- Conjunto de Cantor y sistemas de funciones iterados, 26
- Construcción geométrica de la curva de von Koch, 4
- Curva de Keisswetter, 31
- Curva de Koch y sistemas de funciones iterados, 25
- Curva de Koch, otra vez, 30
- Curvas de Peano y de Hilbert, 40
- Curvas de Takagi, 38
- Curvas fractales, 36
- Esponja de Menger, 8
- Expansiones y contracciones, 25
- Familia de dragones, 35
- Fractales y representación de números complejos, 35
- Función de Weierstrass y función de Riemann, 37
- Helecho de Barnsley, 33
- Ideas básicas, 3
- Iteración de Funciones, 9
- Iteración de funciones afines en la recta, 21
- Iteración de la función raíz cuadrada, 11
- Iteraciones de la aplicación logística, 13
- Método de Newton, 12
- Modelo lineal, 10
- Procesos iterativos, 3
- Producto de conjuntos de Cantor, 28
- Reflexiones en el plano, 23
- Reflexiones respecto al eje vertical, 24
- Reflexiones respecto al origen de coordenadas, 24
- Representación binaria, 19
- Representación decimal, 14
- Representación en base 3, 16
- Representación en otras bases, 16
- Representaciones numéricas, 14
- Rotaciones alrededor del origen, 24
- Similitud, 25
- Sistemas de funciones afines iterados en el plano, 25
- Sistemas de funciones iterados en la recta, 21
- Sistemas iterados de funciones lineales en el plano, 22
- Sucesión de Fibonacci, 3
- Traslaciones en el plano, 23
- Traslaciones, reflexiones y rotaciones, 23
- Triángulo de Sierpinski, 7
- Triángulo de Sierpinski y representación en base 2, 19
- Triángulo de Sierpinski y sistemas de funciones iterados, 28
- Una araucaria, 32

Bibliografía

- [1] M. Barnsley, *Fractal Everywhere*. Academic Press, 1988.
- [2] M. Barnsley, J. H. Elton, D. Hardin, *Recurrent iterated function systems*. Constr. Approx. B5 (1989), 3–31.
- [3] M. Barnsley, S. Demko, *Iterated function systems and the global construction of fractals*. Proc. Roy. Soc. London A399, (1985), 243–275.
- [4] M. Barnsley, A. D. Sloan, *A better way to compress images*. BYTE Magazine, january issue, (1988), 215–223.
- [5] M. Barnsley, M. Berger, H. M. Soner, *Mixing Markov chains and their images*. Prob. Eng. Inf. Sci. 2 (1988), 387–414.
- [6] C. Cabrelli, B. Forte, U. M. Molter, E. Vrscay, *Iterated Fuzzy set systems: A new approach to inverse problem for fractal and other sets*. J. of Math. Analysis and Applications, 117, No. 1 (1992), 79–100.
- [7] C. Cabrelli, U. M. Molter, E. Vrscay, *Recurrent iterated function systems: Invariant measure, a Collages Theorem and moment relations*. Fractal in Fundamental and Applied Sciences, Eds. H. -O. Petgen, J. M. Henriques & L. F. Penedo. North-Holland, 1991, 71–80.
- [8] C. Cabrelli, U. M. Molter, *Density of fuzzy attractors: A step towards the solution of the Inverse Problem for fractals and other sets*. Pre-print, Univ. de Buenos Aires, 1993.
- [9] F. S. Cater, *A typical nowhere differentiable function*. Canad. Math. Bull., 26(1983), 149–151.
- [10] A. Cayley, *The Newton-Fourier imaginary problem*. Am. J. Math. II. 97 (1879).
- [11] A. Cayley, *Application of the Newton-Fourier method to an imaginary root of an equation*. Quaterly J. of Pure and Applied Math. XVI, (1879), 179–185
- [12] J-L. Chabert, *Un demi-siecle de fractales: 1870–1920*. Historia Mathematica 17(1990), 339–365.
- [13] M. Crichton, *Jurassic Park*. Ballantine Books, New York 1990. Si usted ha leído el libro o visto la película, recordará sobre la teoría del caos, en particular la idea de dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales, esta fue la mayor razón de porqué el matematico Ian Malcolm creía que la idea de crear un mundo prehistórico de dinosaurios nunca podría funcionar. Cada capítulo del libro es ilustrado con una iteración del dragón de Heighway.
- [14] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1987.
- [15] G.A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Sringer-Verlag, 1990.

- [16] K. Falconer, *Fractal Geometry*. Willey & Sons, 1990.
- [17] J. Gerver, *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π* . Amer. J. Math. 92(1970),33–55.
- [18] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*. Trans. Amer. Math. Soc., 17 (1916), 301–325.
- [19] M. Hata, *Fractals in Mathematics. Patterns and Waves—Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations*, (1986), 259–278.
- [20] J. E. Hutchinson, *Fractal and Self-Similarity*. Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713–747.
- [21] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming. Vol. 2: Seminumerical Algorithms*. Addison–Wesley, Reading MA, 1981.
- [22] N. Kôno, *On Generalized Takagi Functions*. Act. Math. Acad. Sci. Hungarica.
- [23] H. Lauwerier, *Fractals: Endlessly Repeated Geometrical Figures*. Princeton University Press, 1991.
- [24] P. Lévy, *Les courbes planes ou gauches et les surfaces composée de parties semblables au tout*. Journal de l'École Polytechnique (1938), 227–247, 249–291.
- [25] P. Lévy, *Plane or space curves and surfaces consisting of parts similar to the whole*. In Classics on Fractals, G. A. Edgar, Editor, Addison–Wesley, 181–239.
- [26] T. Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 985–992.
- [27] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, N.Y. (1977).1
- [28] P. Palominos, N. González, *El Uso de la Geometría de Fractales en el Diseño Textil*. Pre-print, USACH 1993.
- [29] Heinz-Otto Peitgen, Jürgen Hartmut and Saupe Dietmar. *Fractals for the Classroom, Part One: Introduction to Fractals and Chaos*. Springer–Verlag New York, Inc. 1990.
- [30] S. Plaza, *Introducción a la Dinámica 1–Dimensional*. Notas Cursillo Semana de la Matemática, U.C.V., 1988.
- [31] S. Plaza, *Fractales y Generación Computacional de Imágenes*. Monografía N° 16 (2000), Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA), Perú. Programas computacionales para diseñar fractales son creación de Miguel Lara A.
- [32] S. Plaza, *Sistemas de Funciones Iterados y Generación Computacional de Imágenes Fractales*. Actas de Coloquios Nacionales de Sistemas Dinámicos. Ed. Eduardo Stange, Univ. de Valparaíso, 1994.
- [33] G. de Rham, *Sur un exemple de fonction continue sans dérivée*. Enseign. Math., 3(1957), 71–72.
- [34] W. Sierpinski, *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*. Compt. Rendus Acad. Sci. Paris 160 (1915), 302–305.
- [35] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1(1903), 176–177.
- [36] A. Smith, *The differentiability of Riemann's function*. Proc. Amer. Math. Soc., 34(1972), 463–468.

- [37] I. Stewart, *Four Encounters with Sierpinski's Gasket*. The Mathematical Intelligencer, 17, No. 1 (1995), 52–64.
- [38] B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*. Math. Z, 32(1930), 474–475.
- [39] R. Williams, *Composition of contractions*. Bol. Soc. Brasil. Mat., 2(1971), 55–59.